TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Markus Niskanen

Liittofunktorit

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Marraskuu 2017

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
NISKANEN, MARKUS: Liittofunktorit
Pro gradu -tutkielma, 85 s.
Matematiikka
Marraskuu 2017

Tiivistelmä

Tutkielman tavoitteena on antaa lukijalle edellytykset liittofunktorien käsitteen ymmärtämiselle. Tätä varten määritellään ensiksi kategoriateorian peruskäsitteitä, kuten kategoria, funktori ja luonnollinen transformaatio, sekä esitellään joitakin niihin liittyviä tuloksia. Tämän jälkeen määritellään universaalimorfismi, raja, koraja, tulo ja kotulo, sekä esitellään myös näiden ominaisuuksia. Seuraavaksi käsitellään joitakin kategoriateorian joukko-opillisia ongelmakohtia sekä esitellään Grothendieckin universumit, joiden näytetään tarjoavan ratkaisuja moniin näistä ongelmista. Lopuksi määritellään liittofunktorit ja tarkastellaan niiden perusominaisuuksia sekä merkitystä. Liittofunktorien havaitaan esiintyvän hyvin laajalti matematiikassa.

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma esittelee lukijalle liittofunktorien käsitteen ja niiden perusominaisuuksia. Näiden ymmärtämiseksi esitellään myös muuta kategoriateorian käsitteistöä sekä näihin käsitteisiin liittyviä tuloksia.

Kategoriateoria on matematiikan osa-alueena melko abstrakti. Se yleistää ja toisaalta yhdistää toisiinsa muiden matematiikan osa-alueiden käsitteitä ja tuloksia. Esimerkiksi joukkojen erillinen yhdiste, modulien suora summa sekä osittainjärjestetyn joukon jonkin osajoukon pienin yläraja ovat pohjimmiltaan saman kategoriateoreettisen määritelmän erikoistapauksia, kuten tullaan havaitsemaan. Ei olekaan siksi yllättävää, että kategoriateoriaa voidaan soveltaa monilla muilla matematiikan osa-alueilla, muun muassa algebrallisessa topologiassa [60], algebrallisessa geometriassa ja logiikassa [70]. Erityisesti liittofunktorien hyödyllisyydestä kertoo kategoriateorian varhaisen tutkijan Saunders Mac Lanen kommentti: ”Liittofunktorit esiintyvät kaikkialla” [7, s. vii].

Fysiikassa sovelluksia löytyy esimerkiksi säieteoriasta ja kvanttikenttäteoriasta [7, s. v] ja tietojenkäsittelytieteessä muun muassa tyyppiteoriasta [60] ja dataintegraatiosta [2].

Kategoriateoriaa on jopa ehdotettu matematiikan perustaksi joukko-opin sijaan. Tämän näkemyksen mukaan joukko-oppi aksiomatisoitaisiin käyttäen kategoriateorian käsitteitä (ks. [18], [6]). Tätä aihetta ei käsitellä tässä tutkielmassa, vaan sen sijaan kategoriateoriaa tarkastellaan käyttäen joukko-opin käsitteitä. Tavanomainen Zermelo–Fraenkelin joukko-oppi ei kuitenkaan usein riitä kategoriateorian käsittelyyn. Tämän vuoksi tutkielman loppupuolella esitellään eräs, vahvempi aksioomajärjestelmä, joka sopii kategoriateorian tarpeisiin paremmin. Tämä esitellään kuitenkin vain ehdotuksenomaisesti, ja muu sisältö on pyritty muotoilemaan siten, että lukijan olisi mahdollisimman helppo tarkastella sitä itse suosimassaan aksioomajärjestelmässä.

Tämän vuoksi joukko-oppia käsitellään tutkielmassa melko intuitiivisella tasolla. Tähän intuitiiviseen näkökulmaan kuuluu kaksi käsitettä: *joukot* sekä *luokat*. Joukkoja käsitellään tavanomaiseen tapaan. Luokat voivat olla joukkoja, mutta ne voivat olla myös aidosti joukkoja suurempia kokoelmia joukkoja tai sisältää muita luokkia. Aiheen kannalta tärkeänä oletuksena on, että voidaan muodostaa ”kaikkien joukkojen luokka”, jossa jokainen joukko on alkiona, sekä ”kaikkien ryhmien luokka”, ”kaikkien topologisten avaruuksien luokka” ja muita vastaavanlaisia matemaattisten struktuurien luokkia. Oletetaan myös, että luokista voidaan muodostaa karteesisia tuloja, jotka ovat luokkia. Lopuksi usein oletetaan, että kahden luokan välille voidaan muodostaa kuvauksia ja että kaikki kuvaukset kahden kiinnitetyn luokan välillä muodostavat luokan.

On huomattava, että jos valitaan jokin joukko-opin aksioomajärjestelmä, kaikki nämä oletukset eivät välttämättä ole siinä voimassa. Monet esitetyistä tuloksista voivat kuitenkin olla voimassa soveltuvin osin. Toinen huomioitava seikka on, että tutkielmassa käytettyjen joukon ja luokan käsitteiden ei tarvitse olla samoja kuin kyseisen aksiomatisoinnin joukon ja luokkien käsitteet. Itse asiassa kyseisen järjestelmän ei tarvitse edes sisältää luokkia tavanomaisessa mielessä; esimerkiksi tutkielmassa ehdotettu aksioomajärjestelmä käyttää vain joukkoja.

Lukijalta edellytetään hyvät perustiedot joukko-opista, ryhmäteoriasta, lineaarialgebrasta ja/tai topologiasta. Esimerkiksi kyseisistä aiheista Tampereen yliopiston kandidaatti- ja maisterivaiheiden kurssit käyneellä pitäisi olla riittävät tiedot. Kategoriateoria ei suoraan pohjaudu näihin tietoihin, mutta ne helpottavat esimerkkien ja joukko-opillisten näkökulmien ymmärtämistä, mikä edelleen tekee koko aiheesta helpommin ymmärrettävän.

Lukijalla ei kuitenkaan oleteta olevan kaikkia tutkielmassa käytettyjä tietoja näiltä aloilta. Tämän tutkielman luku 2 täydentää sitä tietämystä, joka lukijalta edellytetään. Tarvittavat kategoriateorian peruskäsitteet ja -lauseet esimerkkeineen esitellään luvuissa 3–6. Näissä luvuissa esiin nousseita joukko-opillisia ongelmia tarkastellaan lyhyesti luvussa 7, jossa myös esitellään aiemmin mainittu kategoriateoriaan sopiva joukko-opin aksioomajärjestelmä. Tämän jälkeen luvussa 8 päästään tutkielman pääaiheeseen, liittofunktoreihin. Tässä luvussa esitellään liittofunktorien käsite, joitakin esimerkkejä (joista jotkin voivat jo olla lukijalle osittain tuttuja) ja oleellisimpia tuloksia liittyen liittofunktoreihin sekä valaistaan hieman liittofunktorien merkitystä.

Monet tutkielman lauseet ovat muotoa ”ϕ, jos ja vain jos ψ”. Usein näissä tapauksissa todistus on jaettu kahteen osaan, joihin viitataan merkinnöillä ($\Rightarrow$) ja ($\Leftarrow$). Näistä merkinnöistä ensimmäisen jälkeen todistetaan väite ”jos ϕ, niin ψ” ja toisen jälkeen väite ”jos ψ, niin ϕ”. Näiden väitteiden todistukset yhdessä todistavat alkuperäisen väitteen.

Tutkielmassa käytetään usein funktion parametrille tai parametreille merkintää $-$. Esimerkiksi siis merkintä $\sin(-)\cos(-)$ voi asiayhteydestä riippuen viitata joko funktioon $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ tai funktioon $(x, y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$. Jos parametrien määrää tai järjestystä halutaan täsmentää, voidaan parametrit erottaa toisistaan alaindekseillä: merkintä $\sin(-_2)\cos(-_1)$ viittaa funktioon $(x, y) \mapsto \sin(y)\cos(x)$. Tällaisten funktioiden lähtöjoukot joko kerrotaan tai ilmenevät asiayhteydestä. Viivalla on tutkielmassa myös hieman erilaisia merkityksiä, jotka selviävät aihetta käsiteltäessä.

Aihepiirin kirjallisuudessa on käytössä hieman toisistaan poikkeavia merkintöjä. Myös tutkielman merkinnät poikkeavat hieman yleisistä merkintätavoista, pääasiassa ala- ja yläindeksimerkintöjen selkeyttämiseksi. Kategoriateoriassa on usein tapana jättää laskutoimitusten symbolit merkitsemättä samaan tapaan kuin esimerkiksi ryhmäteoriassa, jossa tulo $x \cdot y$ merkitään yleensä xy. Tässä tutkielmassa näitä lyhennysmerkintöjä ei käytetä, jotta olisi helpompi lukea, mistä laskutoimituksesta milloinkin on kyse. Merkintöjä määriteltäessä pyritään esittämään myös kirjallisuudessa nähtäviä vaihtoehtoisia merkintätapoja.

Lähdeteoksista tärkeimpiin kuuluvat Saunders Mac Lanen kirja *Categories for the Working Mathematician* [7] sekä kategoriateoriaan keskittyvä wiki-tietosanakirja *nLab* [9].

2 Esitiedot

Tässä luvussa esitellään joitakin esitietoja, joiden tunteminen ei ole tutkielman aiheen kannalta välttämätöntä, mutta auttaa huomattavasti esimerkkien ymmärtämistä. Koska ne eivät kuulu suoranaisesti aiheeseen, niitä käsitellään melko lyhyesti.

2.1 Joukko-oppia ja järjestyksiä

Lause 2.1 (ks. [33]). *Funktio $f\colon b \to c$ on injektio, jos ja vain jos kaikilla funktioilla $g_1, g_2\colon a \to b$ pätee, että $g_1 = g_2$ aina, kun $f \circ g_1 = f \circ g_2$.*

Lause 2.2 (ks. [20]). *Funktio $f\colon b \to c$ on surjektio, jos ja vain jos kaikilla funktioilla $g_1, g_2\colon c \to d$ pätee, että $g_1 = g_2$ aina, kun $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.*

Lause 2.3. *Olkoon $(s, \leq)$ esijärjestetty joukko. Tällöin $\sim \in \mathcal{P}(s \times s)$,*

$$a \sim b \iff a \leq b \wedge b \leq a,$$

on ekvivalenssirelaatio. Edelleen relaatio $\leq_\sim \in \mathcal{P}(s/{\sim} \times s/{\sim})$,

$$[a] \leq_\sim [b] \iff a \leq b,$$

on hyvinmääritelty ja joukon $s/{\sim}$ osittainjärjestys.

Olkoon vielä $(s', \leq')$ esijärjestys, $\sim'$ ja $\leq'_{\sim'}$ määritelty vastaavasti kuin yllä sekä $f\colon s \to s'$ monotoninen kuvaus. Tällöin $f^*\colon s/{\sim} \to s'/{\sim'}$, $f^*([a]) = [f(a)]$, on hyvinmääritelty ja monotoninen kuvaus.

2.2 Algebraa

Määritelmä 2.1 (ks. [66]). Struktuuri $(G, \cdot)$ on *monoidi*, jos se toteuttaa ryhmän aksioomat mahdollisesti vasta-alkioiden olemassaoloa lukuunottamatta. Jos $(G, \cdot_G)$ ja $(H, \cdot_H)$ ovat monoideja ja $f\colon G \to H$ kuvaus, niin f on *monoidihomomorfismi*, jos $f(a \cdot_G b) = f(a) \cdot_H f(b)$ kaikilla $a, b \in G$ ja $f(0_G) = 0_H$.

Määritelmä 2.2 (ks. [64]). Olkoon S joukko. Tällöin joukko

$$\mathrm{Free}(S) = \left\{ f\colon S \to \mathbb{Z} \mid \mathrm{supp}(f) < \infty \right\}$$

yhdessä kuvausten tavanomaisen pisteittäisen summan kanssa muodostaa joukon S *vapaan Abelin ryhmän*.

Tämä struktuuri $\mathrm{Free}(S)$ on tunnetusti Abelin ryhmä, jonka neutraalialkio kuvaa kaiken nollaksi ja jossa $(-f)(x) = -(f(x))$ kaikilla $f \in F(S)$ ja $x \in S$. Alkio $s \in S$ voidaan samastaa Kroneckerin deltafunktion δ_s kanssa. Kun näin tehdään, voidaan havaita, että S on ryhmän $F(S)$ kanta, kun $F(S)$ mielletään $\mathbb{Z}$-moduliksi.

Lause 2.4. *Olkoot S, T joukkoja, $Free(S), Free(T)$ näiden vapaat Abelin ryhmät ja $f\colon S \to T$ kuvaus. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen homomorfismi $g\colon Free(S) \to Free(T)$, että $g(s) = f(s)$ kaikilla $s \in S$.*

Todistus. Väite seuraa siitä, että S on Abelin ryhmän $F(S)$ kanta. □

Lause 2.5. *Olkoon $f\colon F \to R$ rengashomomorfismi kunnasta F. Tällöin f on injektio.*

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $x \neq y$, niin $f(x - y) * f((x - y)^{-1}) = 1$, joten on voimassa $f(x) - f(y) = f(x - y) \neq 0$. □

Lause 2.6. *Olkoot R_1, R_2 kokonaisalueita ja $f\colon R_1 \to R_2$ injektiivinen rengashomomorfismi. Olkoot K_1 kokonaisalueen R_1 jakokunta ja K_2 samoin kokonaisalueen R_2. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen rengashomomorfismi $g\colon K_1 \to K_2$ siten, että $g(p) = f(p)$ kaikilla $p \in R_1$.*

Todistus. Määritetään, että $g(\frac{p}{q}) = \frac{f(p)}{f(q)}$ kaikilla $p \in R_1$, $q \in R_1 \setminus \{0\}$. Tällöin g on hyvinmääritelty, sillä jos $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, niin

$$f(p) \cdot f(q') = f(p \cdot q') = f(p' \cdot q) = f(p') \cdot f(q).$$

Kyseessä on rengashomomorfismi, sillä selvästi g säilyttää arvot 0 ja 1, ja kaikilla $p_1, p_2 \in R_1$ ja $q_1, q_2 \in R_1 \setminus \{0\}$ pätee

$$g(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2}) = g(\frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}) = \frac{f(p_1 \cdot p_2)}{f(q_1 \cdot q_2)} = \frac{f(p_1)}{f(q_1)} \cdot \frac{f(p_2)}{f(q_2)} = g(\frac{p_1}{q_1}) \cdot g(\frac{p_1}{q_2}),$$

ja samoin käyttäen homomorfismin f ominaisuuksia voidaan havaita, että on voimassa $g(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}) = g(\frac{p_1}{q_1}) + g(\frac{p_2}{q_2})$.

Siis g on hyvinmääritelty rengashomomorfismi ja sen määrityksestä johtuen $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in R_1$. Myös yksikäsitteisyys on voimassa, sillä ehdosta $g(p) = f(p)$ seuraa myös $g(q^{-1}) = f(q)^{-1}$ ja kaikki alkiot $a \in K_1$ voidaan esittää muodossa $a = \frac{p}{q} = p \cdot q^{-1}$. □

2.3 Lineaarialgebraa

Oletetaan kaikilla tässä alaluvussa käsiteltävillä vektoriavaruuksilla olevan sama kerroinkunta K. Käytetään vektoriavaruuden V duaaliavaruuteen $V^* = K^V$ liitetylle bilineaarikuvaukselle $V \times V^* \to K$, $(v, f) \mapsto f(v)$, merkintää $\langle -, - \rangle$.

Lause 2.7 (ks. [62])**.** *Olkoon V vektoriavaruus ja V^* sen duaaliavaruus. Olkoon W myös vektoriavaruus ja W^* sen duaaliavaruus. Olkoon vielä $f\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $f^*\colon W^* \to V^*$, jolle $\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, f^*(w^*) \rangle$ kaikilla $v \in V$ ja $w^* \in W^*$. Tätä kuvausta f^* kutsutaan kuvauksen f* duaalikuvaukseksi.

Todistus. Olkoon $B_V \subseteq V$ avaruuden V kanta ja $B_{W^*} \subseteq W^*$ avaruuden W^* kanta. Kaikilla $w^* \in W^*$ on olemassa yksikäsitteinen $v^* \in V^*$ siten, että $\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, v^* \rangle$ kaikilla $v \in B_V$. Siis on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $g\colon B_{W^*} \to B_V$, jolla $\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, g(w^*) \rangle$ kaikilla $v \in B_V$ ja $w^* \in B_{W^*}$. Tämä funktio g indusoi etsityn funktion f^*, jonka voidaan bilineaarisuuden avulla havaita täyttävän annetun ehdon. □

Lause 2.8 (ks. [62]). *Olkoon V vektoriavaruus ja V^{**} sen biduaaliavaruus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $f\colon V \to V^{**}$ siten, että $\langle v, v^* \rangle = \langle v^*, f(v) \rangle$ kaikilla $v \in V^*$ ja $v^* \in V^*$. Tämä lineaarikuvaus on isomorfismi, jos V on äärellisulotteinen.*

Todistus. Alkuosa voidaan todistaa samankaltaisin tekniikoin kuin edellisen lauseen todistuksessa. Jäljelle jää isomorfisuuden todistus.

Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Jos $v, v' \in V$ siten, että $v \neq v'$, niin $\langle v, v^* \rangle \neq \langle v', v^* \rangle$ jollakin $v^* \in V^*$. Tällöin selvästi $f(v) \neq f(v')$, joten f on injektio. Koska lisäksi V on äärellisulotteinen ja $V \cong V^{**}$, niin f on isomorfismi. □

2.4 Topologiaa

Lause 2.9 (ks. [58]). *Olkoon $(X, \leq)$ esijärjestetty joukko. Tällöin $\tau_\leq \subseteq \mathcal{P}(X)$,*

$$\tau_\leq = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U \forall y \in X (x \leq y \implies y \in U)\},$$

on joukon X topologia.

Todistus. Selvästi $\emptyset, X \in \tau_\leq$. Olkoot $U_1, U_2 \in \tau_\leq$ ja $U_\alpha \in \tau_\leq$ joukkoja kaikilla $\alpha \in A$.

Olkoon $x \in U_1 \cap U_2$ piste. Tällöin koska $x \in U_1 \in \tau_\leq$, niin kaikilla $y \geq x$ pätee $y \in U_1$. Vastaava pätee joukolle U_2, joten kaikilla $y \geq x$ pätee $y \in U_1 \cap U_2$. Siis $U_1 \cap U_2 \in \tau_\leq$.

Olkoon $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Olkoon $x \in U$ piste. Siis jollakin $\alpha \in A$ pätee $x \in U_\alpha$. Siis kaikilla $y \geq x$ pätee $y \in U_\alpha \subseteq U$, joten $U \in \tau_\leq$. □

Lause 2.10 (ks. [58]). *Olkoot $(X, \leq)$ ja $(X', \leq')$ esijärjestettyjä joukkoja ja olkoon $f\colon X \to X'$ monotoninen kuvaus. Varustetaan X edellä määritellyllä topologialla $\tau_\leq$ ja X' vastaavasti topologialla $\tau_{\leq'}$. Tällöin f on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $U \in \tau_{\leq'}$ avoin joukko. Olkoon $V = f^{-1}[U]$. Jos $V = \emptyset$, niin $V \in \tau_\leq$; oletetaan, että näin ei ole. Olkoon $x \in V$ ja $y \geq x$. Tällöin $f(x) \leq' f(y)$. Siis $f(y) \in U$, joten $y \in f^{-1}[U] = V$. Siis V on avoin. □

Lause 2.11 (ks. [58]). *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Tällöin $\leq_\tau \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$,*

$$x \leq_\tau y \iff x \in \mathrm{cl}(\{y\}),$$

missä cl *on (topologinen) sulkeuma, on joukon X esijärjestys.*

Todistus. Koska $X' \subseteq \mathrm{cl}(X')$ kaikilla $X' \subseteq X$, niin $\leq$ on refleksiivinen.

Jos $y \in \mathrm{cl}(\{z\})$, niin $\mathrm{cl}(\{y\}) = \mathrm{cl}(\{y\}) \cap \mathrm{cl}(\{z\}) \subseteq \mathrm{cl}(\{z\})$, sillä joukon X' sulkeuma on kaikkien suljettujen joukkojen $X'' \subseteq X$, $X' \subseteq X''$, leikkaus. Siis jos $x \in \mathrm{cl}(\{y\})$ ja $y \in \mathrm{cl}(\{z\})$, niin $x \in \mathrm{cl}(\{z\})$. Siis $\leq$ on myös transitiivinen. $\square$

Lause 2.12 (ks. [58])**.** *Olkoot (X, τ) ja (X', τ') topologisia avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to X'$ jatkuva kuvaus. Varustetaan X edellä määritellyllä esijärjestyksellä $\leq_\tau$ ja X' vastaavasti esijärjestyksellä $\leq_{\tau'}$. Tällöin f on monotoninen.*

Todistus. Olkoot $x, y \in X$ pisteitä siten, että $x \leq y$. Tällöin $x \in \mathrm{cl}(\{y\})$, joten on voimassa $f(x) \in f[\mathrm{cl}(\{y\})] \subseteq \mathrm{cl}(f[\{y\}]) = \mathrm{cl}(\{f(y)\})$. Siis $f(x) \leq f(y)$. $\square$

3 Kategoriat

Tässä luvussa esitellään kategorian käsite sekä muita kategoriateorian yksinkertaisimpia käsitteitä, kuten duaalisuusperiaate ja kommutatiiviset kaaviot. Samalla tehdään joitakin alkeellisia huomioita pohjautuen näihin käsitteisiin.

3.1 Kategorian määritelmä

Kuten johdannossa mainittiin, kategoriateoriaa voi lähestyä käyttämättä joukko-oppia (ks. myös [7, s. 7-9]), mutta tässä tutkielmassa tehdään toisinpäin – kategoriat määritellään joukko-opillisesti matemaattisina struktuureina, joille pätevät tietyt ehdot.

Määritelmä 3.1 (ks. [7, s.10], [12])**.** Olkoot Ob, Mor erillisiä luokkia. Olkoot $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon \mathrm{Mor} \to \mathrm{Ob}$ funktioita. Määritellään lisäksi merkintä

$$\hom(c, d) = \{f \in \mathrm{Mor} \mid \mathrm{dom}(f) = c \land \mathrm{cod}(f) = d\}.$$

Olkoon $\circ$ osittainen funktio $\mathrm{Mor} \times \mathrm{Mor} \to \mathrm{Mor}$, jonka arvo $f \circ g$ kuuluu luokkaan $\hom(\mathrm{dom}(g), \mathrm{cod}(f))$, kun $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$, ja muulloin ei ole olemassa. Tällöin struktuuri $C = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$ on *kategoria*, jos

- kaikilla $x, y, z, w \in \mathrm{Ob}$, $f \in \hom(z, w)$, $g \in \hom(y, z)$, $h \in \hom(x, y)$ on voimassa assosiatiivisuus $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ja

- kaikille $c \in \mathrm{Ob}$ on olemassa sellainen $\mathrm{id}_c \in \hom(c, c)$, että

  – kaikille $d \in \mathrm{Ob}$ ja $f \in \hom(c, d)$ pätee $f \circ \mathrm{id}_c = f$ ja

  – kaikille $d \in \mathrm{Ob}$ ja $g \in \hom(d, c)$ pätee $\mathrm{id}_c \circ g = g$.

Tällöin Ob ovat kategorian C *objektit*, Mor kategorian C *morfismit*, $\mathrm{dom}(f)$ morfismin f *lähtöobjekti*, $\mathrm{cod}(f)$ morfismin f *maaliobjekti*, $\circ$ morfismien *yhdiste* ja id_c objektin c *identtinen morfismi*. Morfismeja $f \in \hom(c, d)$ voidaan kutsua morfismeiksi c:stä d:hen, ja niille voidaan myös käyttää merkintää $f\colon c \to d$ samaan tapaan kuin kuvauksille yleensä käytetään.

Joskus kirjallisuudessa yhdisteelle käytetään myös merkintää $f \circ g = fg$ ja objektin c identtiselle morfismille merkintää $\mathrm{id}_c = 1_c$.

Huomautus. Se, voidaanko jotakin yhdistettä $\circ$ yleensä määritellä, riippuu morfismiluokan Mor koosta sekä käytetyistä aksioomista. Tutkielmassa oletetaan, että kaikki tarkasteltavat yhdisteet voidaan määritellä.

Ilman erillistä mainintaa symboleilla a, b, c, d, e, j viitataan aina joihinkin objekteihin ja symboleilla f, g, h morfismeihin. Muuttujilla x, y, z voidaan viitata sekä objekteihin että morfismeihin. Symboleilla C, D, E, J viitataan kategorioihin. Esimerkiksi siis $c \in C$ luetaan ”c on objekti kategoriassa C”, kun taas $\forall x \in C$ luetaan

”kaikille objekteille ja kaikille morfismeille x kategoriassa C”. Objekteille voidaan käyttää myös muille matematiikan aloille tyypillisiä symboleita; esimerkiksi jos objekti on vektoriavaruus, sille voidaan käyttää symboleita V tai W.

Jatkossa jos C on kategoria, voidaan merkinnällä C tarkoittaa koko kategorian sijasta myös objektien luokkaa Ob, morfismien luokkaa Mor tai objektien ja morfismien yhdistettä $\mathrm{Ob} \cup \mathrm{Mor}$. Merkinnän merkityksen oletetaan tällöin selviävän asiayhteydestä. Samoin voidaan käyttää merkintää id identtiselle morfismille id_c, jos objektin c voidaan katsoa selviävän asiayhteydestä.

Esitetään seuraavaksi vielä muutama huomio kategorian määritelmästä.

- Se, että Ob ja Mor ovat erillisiä, ei heikennä määritelmää; jos kaksi luokkaa X ja X' eivät ole erillisiä, ne voidaan korvata luokilla $X \times \{0\}$ ja $X' \times \{1\}$, jotka ovat erillisiä.

- Luokat $\hom(c, d)$ muodostavat morfismien osituksen. Kategorian C määrittelemiseksi ei siis tarvitse eksplisiittisesti määritellä luokkaa Mor_C sekä funktioita dom_C ja cod_C, jos niiden sijaan määritellään $\hom(c, d)$ kaikilla $c, d \in \mathrm{Ob}_c$. Täsmällisesti ottaen tällöin pitäisi myös tarkistaa, että kaikki hom-luokat ovat erillisiä, mutta kuten edellisessä kohdassa, tämä on vain tekninen yksityiskohta, jonka voi sivuuttaa.

- Morfismien yhdisteen assosiatiivisuus antaa perusteen sulkujen pois jättämiselle.

- Identtinen morfismi id_c on yksikäsitteinen kaikille $c \in \mathrm{Ob}_c$, sillä jos myös $f : c \to c$ täyttää identtisen morfismin ehdot, niin $f = f \circ \mathrm{id}_c = \mathrm{id}_c$.

Esimerkki 3.1 (ks. [7, s.10])**.** Tyhjä kategoria $\mathbf{0}$, jossa ei ole yhtään objektia tai morfismia, sekä yhden objektin 0 ja yhden morfismin id_0 kategoria $\mathbf{1}$ ovat selvästi kategorioita. Myös $\mathbf{2}$, jossa on kaksi objektia $\emptyset$ ja 1, näiden identtiset morfismit ja yksi morfismi $\emptyset \to 1$, on kategoria. Kaikissa näistä on tasan yksi tapa määritellä yhdiste.

Esimerkki 3.2 (ks. [7, s.11])**.** Olkoon X jokin joukko ja $\leq$ sen esijärjestys. Olkoon $\mathrm{Ob} = X$ ja $\hom(c, d) = \{\emptyset\}$, jos $c \leq d$, ja muulloin $\hom(c, d) = \emptyset$ kaikille $c, d \in X$. Jos nyt $f \in \hom(d, e)$ ja $g \in \hom(c, d)$ joillakin $c, d, e \in X$, niin $c \leq d$ ja $d \leq e$. Siis $c \leq e$, joten $|\hom(c, e)| = 1$. Voidaan siis määrittää yksikäsitteisesti yhdiste $\circ$, joka on helppo havaita myös assosiatiiviseksi, koska $|\hom(c, d)| \leq 1$ kaikilla $c, d \in X$. Lisäksi kaikilla $c \in C$ pätee $c \leq c$, joten $|\hom(c, c)| = 1$, ja selvästi tälle morfismille $f \in \hom(c, c)$ pätevät identtisen morfismin ehdot. Siis joukot X, $\hom(c, d)_{c,d \in X}$ sekä yhdiste $\circ$ muodostavat kategorian. Jokainen esijärjestys voidaan siis samastaa tietyn kategorian kanssa.

Esimerkki 3.3 (ks. [7, s.11])**.** Olkoon $(G, \cdot)$ monoidi. Tällöin objektit $\mathrm{Ob} = \{\emptyset\}$, morfismit $\mathrm{Mor} = G$ ja yhdiste $f \circ g = f \cdot g$ muodostavat kategorian. Tämä kategoria voidaan samastaa monoidin G kanssa.

Esimerkki 3.4 (ks. [40])**.** Määritellään *relaatioiden kategoria* **Rel** seuraavasti. Olkoon $\mathrm{Ob}_{\mathbf{Rel}}$ kaikkien joukkojen luokka. Olkoon $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ kaikilla joukoilla X, Y ja $\circ_{\mathbf{Rel}}$ relaatioiden yhdiste. Tunnetusti kaikille joukoille X on olemassa identtinen morfismi id_X (nimittäin identtinen kuvaus $X \longrightarrow X$) ja relaatioiden yhdiste on assosiatiivinen. Näistä seuraa, että **Rel** on todella kategoria.

Esimerkki 3.5 (ks. [7, s. 12])**.** Määritellään *joukkojen kategoria* **Set** kuten **Rel**, mutta valitaan sen morfismeiksi $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y) = Y^X$ kaikilla joukoilla X, Y. Tällöin $\circ_{\mathbf{Set}}$ on kuvausten yhdiste, ja **Set** on selvästi kategoria.

Esimerkki 3.6 (ks. [26])**.** *Ryhmien kategoria* **Grp** muodostuu kaikkien ryhmien luokasta. Sen morfismit $G \longrightarrow H$ ovat homomorfismit $G \longrightarrow H$ ja sen morfismien yhdiste on kuvausten yhdiste. Tämä yhdiste on assosiatiivinen. Identtinen kuvaus ja homomorfismien yhdisteet ovat homomorfismeja, joten vaaditut identtiset morfismit ja morfismien yhdisteet ovat olemassa. Kyseessä on siis todella kategoria.

Esimerkki 3.7 (ks. [44])**.** *Topologisten avaruuksien kategoria* **Top** muodostuu kaikkien topologisten avaruuksien luokasta. Sen morfismit $X \longrightarrow Y$ ovat jatkuvat kuvaukset $X \longrightarrow Y$ ja sen morfismien yhdiste on kuvausten yhdiste. Kuten ryhmien tapauksessa, voidaan havaita, että yhdiste on assosiatiivinen ja identtiset morfismit ja morfismien yhdisteet ovat olemassa.

Muihin edellisten kaltaisiin kategorioihin, joita tästä tutkielmasta löytyy, kuuluvat muun muassa

- *renkaiden kategoria* **Rng**, joka muodostuu renkaiden luokasta, rengashomomorfismeista ja kuvausten yhdisteestä (ks. [7, s. 12]),
- *K-kertoimisten vektoriavaruuksien kategoria* K-**Vect**, joka muodostuu vektoriavaruuksista, joiden kerroinkunta on K, näiden välisistä lineaarikuvauksista sekä kuvausten yhdisteestä (ks. [47]) ja
- *esijärjestettyjen joukkojen kategoria* **Pre**, joka muodostuu esijärjestettyjen joukkojen luokasta, näiden välisistä monotonisista kuvauksista ja kuvausten yhdisteestä (ks. [59]).

3.2 Erilaisia kategorioita, objekteja ja morfismeja

Kategorioita, objekteja ja morfismeja voidaan luokitella eri alalajeihin, joista nyt esitellään joitakin. Tämän jälkeen tehdään muutamia huomioita liittyen näihin.

Määritelmä 3.2. Kategoria C on

- *diskreetti*, jos sen kaikki morfismit ovat identtisiä morfismeja (ks. [7, s.11]),
- *äärellinen*, jos Ob_C ja Mor_C ovat äärellisiä (ks. [22]),
- *pieni*, jos Ob_C ja Mor_C ovat joukkoja eivätkä aitoja luokkia (ks. [41]),

- *suuri*, jos se ei ole pieni (ks. [31]) ja
- *lokaalisti pieni*, jos $\hom_C(c, d)$ on joukko kaikilla $c, d \in \mathrm{Ob}_C$ (ks. [32]).

Tähän asti esitellyistä kategorioista voidaan mainita esimerkkeinä, että **1** on diskreetti, äärellinen ja pieni, joukon esijärjestykset ovat pieniä ja **Set** on suuri ja lokaalisti pieni. Selvästi jos kategoria on pieni, niin se on myös lokaalisti pieni, mutta kuten jo kategoriasta **Set** havaitaan, päinvastainen ei päde yleisesti.

Määritelmä 3.3. Objekti c on kategorian C

- *alkuobjekti*, jos kaikilla $d \in \mathrm{Ob}_C$ pätee $|\hom_C(c, d)| = 1$ (ks. [29]),
- *loppuobjekti*, jos kaikilla $d \in \mathrm{Ob}_C$ pätee $|\hom_C(d, c)| = 1$ (ks. [43]) ja
- *nollaobjekti*, jos se on sekä alku- että loppuobjekti (ks. [49]).

Alkuobjektille voidaan käyttää merkintää $\emptyset$, loppuobjektille 1 ja nollaobjektille 0.

Kategoriassa **1** on vain nollaobjekti. Kategoriassa **Set** on alkuobjekti (tyhjä joukko, josta on tyhjä kuvaus jokaiseen joukkoon) sekä loppuobjekteja (yhden alkion joukot), mutta ei nollaobjektia (ks. [7, s. 20]). Jos esijärjestyksellä on minimi, tämä objekti on myös sen alkuobjekti; muulloin alkuobjektia ei ole. Vastaavasti esijärjestyksen loppuobjektit ovat täsmälleen sen maksimeja. Kategoriassa **Grp** on nollaobjektina (mikä tahansa) triviaali ryhmä (ks. [7, s. 20]).

Määritelmä 3.4. Morfismi $f : b \longrightarrow c$ on

- *monomorfismi*, jos kaikille $g, g' : a \longrightarrow b$, joilla $f \circ g = f \circ g'$, pätee $g = g'$ (ks. [33]),
- *epimorfismi*, jos kaikille $g, g' : c \longrightarrow d$, joilla $g \circ f = g' \circ f$, pätee $g = g'$ (ks. [20]),
- morfismin $g : c \longrightarrow b$ *oikea käänteismorfismi* eli *sektio*, jos $g \circ f = \mathrm{id}_b$ (ks. [7, s.19]),
- morfismin $g : c \longrightarrow b$ *vasen käänteismorfismi* eli *retraktio*, jos $f \circ g = \mathrm{id}_c$ (ks. [7, s.19]),
- *isomorfismi*, jos sillä on (molemminpuoleinen) käänteismorfismi $f^{-1} : c \longrightarrow b$, jolla $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ ja $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ (ks. [30]),
- *automorfismi*, jos se on isomorfismi ja $b = c$ (ks. [19]) ja
- *nollamorfismi*, jos se on kahden morfismin $g : b \longrightarrow 0$ ja $h : 0 \longrightarrow c$ yhdiste $h \circ g$ (ks. [50]).

Jos objektien c ja d välillä on olemassa jokin isomorfismi, niitä voidaan sanoa *isomorfisiksi*, mikä merkitään $c \cong d$.

Esimerkki 3.8. Joukon esijärjestyksessä kaikki morfismit ovat mono- ja epimorfismeja, ja automorfismin sekä identtisen morfismin määritelmät ovat tässä kategoriassa ekvivalentteja. Nämä johtuvat siitä, että $|\hom(c,d)| \in \{0,1\}$ kaikilla kyseisen joukon alkioilla c ja d.

Esimerkki 3.9. Kategoriassa **Set** monomorfismin ja injektion määritelmät ovat ekvivalentteja; samoin epimorfismin ja surjektion; isomorfismin ja bijektion; automorfismin ja permutaation. Koska nollaobjektia ei ole, ei ole myöskään nollamorfismeja.

Esimerkki 3.10. Kategorian **Grp** nollamorfismit ovat täsmälleen sen nollakuvaukset, sillä nollamorfismi on selvästi aina nollakuvaus, ja jos $f : c \to d$ on nollakuvaus ja $g : d \to d$ nollamorfismi, niin $f = g \circ f$ on nollamorfismi. Sama pätee mm. kategoriassa K-**Vect**.

Lause 3.1. *Identtinen morfismi on automorfismi, sillä se on oma käänteismorfisminsa.*

Muutamassa seuraavista lauseista todistetaan vain yksi osa väitteestä. Esittämättä jätetyt "vastaavien" väitteiden todistukset ovat pitkälti samanlaisia kuin esitetyt. Todistusten esittämättä jättäminen voidaan perustella myös pian käsiteltävällä duaalisuusperiaatteella.

Lause 3.2. *Sektiot ovat monomorfismeja. Vastaavasti retraktiot ovat epimorfismeja.*

Todistus. Olkoon f morfismin g sektio ja h, h' sellaisia morfismeja, että on voimassa $f \circ h = f \circ h'$. Tällöin

$$h = \mathrm{id} \circ h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' = \mathrm{id} \circ h' = h',$$

mikä todistaa väitteen sektioille. □

Seuraus 3.3. *Isomorfismit ovat mono- ja epimorfismeja, ja niiden käänteismorfismit ovat siten yksikäsitteisiä.*

Huomautus. Sektiot ja retraktiot eivät yleisesti ottaen ole yksikäsitteisiä. Esimerkiksi kaikki funktiot $\{\emptyset\} \to \mathbb{Z}$ ovat funktion $\mathbb{Z} \to \{\emptyset\}$ sektioita kategoriassa **Set**.

Lause 3.4. *Morfismit alkuobjektiin ovat selvästi epimorfismeja, ja morfismit loppuobjektista ovat selvästi monomorfismeja.*

Lause 3.5. *Olkoon C kategoria, jossa on alkuobjekti $\emptyset$. Tällöin objekti $c \in \mathrm{Ob}_C$ on alkuobjekti, jos ja vain jos se on isomorfinen objektin $\emptyset$ kanssa (ks.* [65]*). Vastaava pätee loppu- ja nollaobjekteille.*

Todistus. Oletetaan, että c on alkuobjekti. On olemassa yksikäsitteiset morfismit $f : c \to \emptyset$ ja $g : \emptyset \to c$. Lisäksi $\hom(c,c) = \{\mathrm{id}_c\}$ ja $\hom(\emptyset,\emptyset) = \{\mathrm{id}_\emptyset\}$. Siis $f \circ g = \mathrm{id}_\emptyset$ ja $g \circ f = \mathrm{id}_c$, joten $c \cong \emptyset$.

Oletetaan, että $c \cong \emptyset$, ja olkoon $f : c \to \emptyset$ isomorfismi. Olkoon $d \in \mathrm{Ob}_C$ objekti ja $g : \emptyset \to d$ morfismi. Nyt $g \circ f \in \hom(c,d)$, joten $\hom(c,d)$ on epätyhjä. Olkoot $g, g' : c \to d$ morfismeja. Tällöin $g \circ f^{-1} = g' \circ f^{-1}$, sillä f^{-1} on morfismi alkuobjektista. Siis $g = g'$, joten pätee $|\hom(c,d)| = 1$. Siis c on alkuobjekti. □

Lause 3.6. *Jos $f\colon b \to c$ ja $g\colon a \to b$ ovat monomorfismeja, niin myös $f \circ g$ on monomorfismi. Vastaava pätee epi-, iso- ja automorfismeille. Jos f tai g on nollamorfismi, niin myös $f \circ g$ on.*

Todistus. Nollamorfismeille väite seuraa suoraan määritelmästä. Todistetaan väite mono- ja isomorfismeille. Loput tapaukset voidaan johtaa näistä.

Olkoot f, g monomorfismeja ja h, h' morfismeja siten, että $f \circ g \circ h = f \circ g \circ h'$. Tällöin $g \circ h = g \circ h'$, joten $h = h'$. Siis $f \circ g$ on monomorfismi.

Olkoot f, g sellaisia isomorfismeja, että $f \circ g$ on määritelty. Tällöin

$$f \circ g \circ g^{-1} \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{id} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

ja samoin $g^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ g = \mathrm{id}$, joten $f \circ g$ on isomorfismi. □

Lause 3.7. *Jos kategoriassa C on nollaobjekti, niin siinä on kaikille $c, d \in C$ tasan yksi nollamorfismi $c \to d$. Erityisesti sillä ei ole väliä, minkä nollaobjektin kautta morfismi muodostetaan.*

Todistus. Olkoot $0, 0'$ nollaobjekteja. Olkoot $f \circ g$, $f' \circ g'$ nollamorfismeja, missä morfismien muodot ovat $f\colon 0 \to d, f'\colon 0' \to d, g\colon c \to 0, g'\colon c \to 0'$. Olkoon $h\colon 0 \to 0'$ morfismi. Tällöin

$$f \circ g = (f' \circ h) \circ (h^{-1} \circ g') = f' \circ g',$$

mikä todistaa väitteen. □

3.3 Vastakkainen kategoria, alikategoria ja tulokategoria

Esitetään seuraavaksi kolme tapaa konstruoida uusia kategorioita ennestään tunnetuista kategorioista.

Määritelmä 3.5 (ks. [35])**.** Olkoon C kategoria. Olkoon D kategoria, jonka objektit ja morfismit ovat samat kuin kategorian C, mutta jossa $\mathrm{dom}_D = \mathrm{cod}_C$, $\mathrm{cod}_D = \mathrm{dom}_C$ ja $f \circ_D g = g \circ_C f$ kaikilla f, g, joilla $g \circ_C f$ on määritelty. Tällöin D on kategorian C *vastakkainen kategoria*, jolle voidaan myös käyttää merkintää C^{op}.

Selvästi vastakkainen kategoria on kategoria ja $(C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = C$. Lisäksi C on diskreetti, äärellinen, pieni, suuri, ja/tai lokaalisti pieni, jos ja vain jos kategorialla C^{op} on nämä samat ominaisuudet.

Määritelmä 3.6 (ks. [7, s.31])**.** Olkoon ϕ lause, joka käyttää loogista aakkostoa, muuttujasymboleja $c_0, c_1, \ldots$ ja $f_0, f_1, \ldots$ sekä atomilauseita

- $f_k\colon c_l \to c_m$,
- $c_k = \mathrm{dom}(f_l)$ ja $c_k = \mathrm{cod}(f_l)$,
- $f_k = \mathrm{id}_{c_l}$ ja

- $f_k = f_l \circ f_m$.

Tällöin lause ϕ^{op}, joka saadaan lauseesta ϕ korvaamalla jokainen atomilause

- $f_k \colon c_l \to c_m$ atomilauseella $f_k \colon c_m \to c_l$,
- $c_k = \mathrm{dom}(f_l)$ atomilauseella $c_k = \mathrm{cod}(f_l)$,
- $c_k = \mathrm{cod}(f_l)$ atomilauseella $c_k = \mathrm{dom}(f_l)$ ja
- $f_k = f_l \circ f_m$ atomilauseella $f_k = f_m \circ f_l$,

on lauseen ϕ *duaalilause*.

Nämä lauseet voidaan luontevasti tulkita jossakin kategoriassa C – symbolit $c_0, c_1, \ldots$ ovat sen objekteja, symbolit $f_0, f_1, \ldots$ sen morfismeja ja esimerkiksi atomilause $f_k \colon c_l \to c_m$ merkitsee, että f_k on morfismi objektista c_l objektiin c_m. On helppo havaita induktiolla lauseen pituuden suhteen, että kaikille tällaisille lauseille ϕ pätee, että ϕ on tosi kategoriassa C, jos ja vain jos ϕ^{op} on tosi kategoriassa C^{op}.

Esimerkiksi väite ”kategoriassa on alkuobjekti” voidaan esittää lauseena

$$\exists c_0 \forall c_1 \exists f_0 \big(f_0 \colon c_0 \to c_1 \wedge \forall f_1 (f_1 \colon c_0 \to c_1 \implies f_0 = f_1)\big),$$

ja sen duaalilause on tällöin

$$\exists c_0 \forall c_1 \exists f_0 \big(f_0 \colon c_1 \to c_0 \wedge \forall f_1 (f_1 \colon c_1 \to c_0 \implies f_0 = f_1)\big),$$

eli ”kategoriassa on loppuobjekti”. Siis jos kategoriassa C on alkuobjekti, kategoriassa C^{op} tulee olla loppuobjekti. Jos jokin lause pätee kaikissa kategorioissa, myös sen duaalilauseen tulee päteä kaikissa kategorioissa. Tämän vuoksi jos todistetaan vaikkapa väite ”kaikki sektiot ovat monomorfismeja”, on oikeastaan samalla jo todistettu väite ”kaikki retraktiot ovat epimorfismeja”. (ks. [7, s.31-33])

Havaitaan myös, että osa määritelmissä 3.3 ja 3.4 esitetyistä käsitteistä jakautuvat pareiksi nk. duaalikäsitteitä. Esimerkiksi objekti $c \in C$ on alkuobjekti täsmälleen silloin, kun se on kategorian C^{op} loppuobjekti. Toisena esimerkkinä morfismin f sektiot kategoriassa C ovat morfismin f retraktioita kategoriassa C^{op}. Toisaalta osa esitetyistä käsitteistä ovat omia duaalejaan; esimerkiksi kategorian C nollaobjektit ovat samoja kuin kategorian C^{op} ja kategorian C isomorfismit samoja kuin kategorian C^{op}.

Edellä esiteltiin esimerkkinä täsmällinen, logiikkaan pohjautuva lähestymistapa yhtä kategoriaa koskeviin duaalilauseisiin ja -käsitteisiin. Samanlaista duaalisuuden periaatetta voi käyttää myös käsiteltäessä useita kategorioita sekä näiden välisiä kuvauksia, mutta tällaisia tapauksia varten ei esitetä täsmällistä loogisten lauseiden muotoilua ja tulkintoja; edellisellä esimerkillä vain havainnollistettiin tätä periaatetta.

Määritelmä 3.7 (ks. [42]). Olkoon C kategoria. Olkoot $\mathrm{Ob}_D \subseteq \mathrm{Ob}_C$ ja $\mathrm{Mor}_D \subseteq \mathrm{Mor}_C$ luokkia. Olkoon $\mathrm{dom}_D = \mathrm{dom}_C \restriction_{\mathrm{Mor}_D}$, $\mathrm{cod}_D = \mathrm{cod}_C \restriction_{\mathrm{Mor}_D}$ ja $\circ_D = \circ_C \restriction_{\mathrm{Mor}_D \times \mathrm{Mor}_D}$. Tällöin $(\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Mor}_D, \mathrm{dom}_D, \mathrm{cod}_D, \circ_D)$ on kategorian C *alikategoria*, jos

- kaikille $f \in \mathrm{Mor}_D$ pätee $\mathrm{dom}_D(f), \mathrm{cod}_D(f) \in \mathrm{Ob}_D$,
- kun $f, g \in \mathrm{Mor}_D$ ja $\mathrm{dom}_D(f) = \mathrm{cod}_D(g)$, niin $f \circ g \in \mathrm{Mor}_D$, ja
- kun $c \in \mathrm{Ob}_D$, niin $\mathrm{id}_c \in \mathrm{Mor}_D$.

Jos $\hom_C(d_1, d_2) = \hom_D(d_1, d_2)$ kaikilla $d_1, d_2 \in D$, niin kyseessä on *täysi* alikategoria.

Selvästi kategorian mikä tahansa alikategoria on aina kategoria.

Esimerkki 3.11 (ks. [7, s. 12])**.** Abelin ryhmien kategoria **Ab** on se kategorian **Grp** täysi alikategoria, johon kuuluvat täsmälleen Abelin ryhmät ja näiden väliset homomorfismit. Seuraa suoraan tämän kategorian määritelmästä, että kyseessä on todella kategorian **Grp** alikategoria.

Esimerkki 3.12 (ks. [47])**.** Äärellisulotteisten K-kertoimisten vektoriavaruuksien kategoria K-**FinVect** on se kategorian K-**Vect** täysi alikategoria, johon kuuluvat täsmälleen äärellisulotteiset K-kertoimiset vektoriavaruudet ja näiden väliset lineaarikuvaukset.

Esimerkki 3.13. Osittainjärjestettyjen joukkojen kategoria **Pos** on se kategorian **Pre** täysi alikategoria, johon kuuluvat täsmälleen osittainjärjestetyt joukot ja näiden väliset monotoniset kuvaukset.

Esimerkki 3.14. Nyt havaitaan, että kategoria **Set** määriteltiin aiemmin kategorian **Rel** alikategoriaksi, sillä kuvaukset ovat relaatioita.

Esimerkki 3.15. Määritellään *äärellisten joukkojen kategoria* **FinSet** siksi kategorian **Set** täydeksi alikategoriaksi, jonka objekteina ovat täsmälleen äärelliset ryhmät.

Määritelmä 3.8 (ks. [37])**.** Olkoot C ja D kategorioita. Olkoon $\mathrm{Ob}_{C\times D} = \mathrm{Ob}_C \times \mathrm{Ob}_D$ ja $\hom_{C\times D}\big((c_1, d_1), (c_2, d_2)\big) = \hom_C(c_1, c_2) \times \hom_D(d_1, d_2)$ kaikilla $c_1, c_2 \in C$ ja $d_1, d_2 \in D$. Olkoon vielä $(f_C, f_D) \circ_{C\times D} (g_C, g_D) = (f_C \circ_C g_C, f_D \circ_D g_D)$ kaikilla morfismeilla $f_C, g_C \in \mathrm{Mor}_C$ ja $f_D, g_D \in \mathrm{Mor}_D$, joilla pätevät $\mathrm{dom}(f_C) = \mathrm{cod}(g_C)$ ja $\mathrm{dom}(f_D) = \mathrm{cod}(g_D)$. Nämä juuri määritellyt objektit, morfismit ja yhdiste muodostavat kategorioiden C ja D *tulokategorian* $C \times D$.

Lause 3.8. *Tulokategoria on kategoria.*

Todistus. Väite seuraa suoraan määritelmistä. Identtisille morfismeille pätee yhtäsuuruus $\mathrm{id}_{(c,d)} = (\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d)$. □

3.4 Kaaviot

Usein on hyödyllistä havainnollistaa määritelmiä ja lauseita *kaavioilla*. Kaavio on graafinen esitystapa objekteille ja morfismeille. Se muistuttaa suunnattujen graafien yleistä esitystapaa; siinä objektit on piirretty tasolle (kuten graafin solmut) ja morfismit esitetään nuolena lähtöobjektistaan maaliobjektiinsa (kuten graafin särmät). Esimerkiksi kaaviolla

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[loop left] \arrow[r] & 1 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

voidaan esittää koko kategoria **2**.

Koska kategoriassa on tärkeää erottaa eri morfismit samojen objektien välillä, jokaiseen nuoleen yleensä yhdistetään kyseisen morfismin symboli. Jos esimerkiksi S on joukko ja π_1 ja π_2 kanoniset projektiot $S \times S \to S$, voidaan kaaviolla

$$\begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & S \end{tikzcd}$$

havainnollistaa näitä morfismeja.

Erityisen hyödyllisiä kaavioita ovat *kommutoivat* kaaviot. Intuitiivisesti kommutoivat kaaviot ovat seuraavanlaisia: jos kaavion nuolia pitkin voidaan kulkea kahta reittiä, joilla on sama alku- ja päätepiste, niin näistä kahdesta reitistä muodostuvat morfismien yhdisteet ovat samat. Yleensä edellinen kaavio ei siis kommutoi, sillä tavallisesti $\pi_1 \neq \pi_2$. Toisaalta kaavio

$$\begin{tikzcd} S & S \times S \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & S \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla S. Tämä kaavio havainnollistaa myös sitä, että sama objekti voi esiintyä yhdessä kaaviossa useaan kertaan eri ”rooleissa”.

Joitakin määritelmiä ja lauseita havainnollistettaessa voidaan myös käyttää nuolta, jonka varsi on katkonainen. Tällä tarkoitetaan, että on olemassa morfismi, jonka lähtö- ja maaliobjektit ovat samat kuin tämän nuolen. Jos kaavion sanotaan kommutoivan, voidaan tämä morfismi valita siten, että sen lisääminen kaavioon pitää kaavion kommutoivana. Jos nuoli vielä varustetaan huutomerkillä, tämä morfismi on yksikäsitteinen. Esimerkiksi kaavio

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, dashed, "!"] & d \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla kyseisen kategorian objekteilla d, jos ja vain jos c on alkuobjekti.

Esitetään vielä muutama esimerkki kommutoivista kaavioista. Kaavio

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_c"'] & d \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

kommutoi tasan silloin, kun g on morfismin f vasen käänteismorfismi. Sama ehto voidaan esittää myös kommutoivana kaaviona

$$\begin{tikzcd} c \arrow[loop left, "\mathrm{id}_c"] \arrow[r, bend left, "f"] & d. \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Kaavio

$$\begin{tikzcd} c \arrow[loop left, "\mathrm{id}_c"] \arrow[r, bend left, "f"] & d \arrow[l, bend left, dashed, "!"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_d"] \end{tikzcd}$$

kommutoi täsmälleen silloin, kun f on isomorfismi, jolloin huutomerkillä merkitty yksikäsitteinen morfismi on f^{-1}.

4 Funktorit

Tässä luvussa esitellään funktorin käsite ja tarkastellaan erilaisia funktoreita ja niiden ominaisuuksia.

Tässä tutkielmassa puhuttaessa jostakin kuvauksesta $F\colon C \to D$, missä C ja D ovat kategorioita, tällä tarkoitetaan tarkalleen ottaen sellaista kuvausta muotoa $\mathrm{Ob}_C \cup \mathrm{Mor}_C \to \mathrm{Ob}_D \cup \mathrm{Mor}_D$, joka kuvaa objektit objekteiksi ja morfismit morfismeiksi. Käytetään lisäksi merkintöjä $F_{\mathrm{Ob}} = F\restriction_{\mathrm{Ob}_C}$ ja $F_{\mathrm{Mor}} = F\restriction_{\mathrm{Mor}_C}$.

4.1 Funktorin määritelmä

Määritellään aluksi funktorit. Tarkastellaan myös joitakin esimerkkejä ja perustuloksia.

Määritelmä 4.1 (ks. [7, s.13])**.** Olkoot C ja D kategorioita ja $F\colon C \to D$ kuvaus. Tällöin F on *(kovariantti) funktori* kategoriasta C kategoriaan D, jos

1. kun $f \in \hom_C(c, d)$, niin $F(f) \in \hom_D(F(c), F(d))$ kaikilla $c, d \in \mathrm{Ob}_C$,
2. kaikilla $c \in \mathrm{Ob}_C$ pätee $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$ ja
3. kaikilla $f, g \in \mathrm{Mor}_C$, $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$, pätee $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Edelliset ehdot voi kuvailla myös niin, että aina kun $c, d, e, f, g, h \in C$ ja kaavio

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & d \arrow[d, "g"] \\ & e \end{tikzcd}$$

kommutoi, niin myös

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{F(c)}"] \arrow[loop right, "F(\mathrm{id}_c)"] \end{tikzcd} \text{ ja } \begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(d) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(e) \end{tikzcd}$$

ovat kommutoivia kaavioita.

Kategoriaa C voidaan kutsua funktorin F *lähtökategoriaksi* ja kategoriaa D vastaavasti *maalikategoriaksi*.

Usein kirjallisuudessa käytetään myös merkintöjä $F(c) = Fc$ ja $F(f) = Ff$.

Funktoreille käytetään tässä tutkielmassa useimmiten symboleita F, G ja H.

Määritelmä 4.2 (ks. [15])**.** Olkoot C ja D kategorioita. Jos $F\colon C^{\mathrm{op}} \to D$ on funktori, sitä voidaan kutsua *kontravariantiksi funktoriksi* kategoriasta C kategoriaan D.

Kontravariantti funktori on siis funktori, joka kääntää morfismien suunnan – jokainen morfismi $a \to b$ kuvautuu morfismiksi $F(b) \to F(a)$.

Esimerkki 4.1. Selvästi kategorian C *identtinen funktori* $\mathrm{Id}_C \colon C \to C$, $\mathrm{Id}_C(x) = x$ kaikilla $x \in \mathrm{Ob}_C \cup \mathrm{Mor}_C$, on funktori kaikilla kategorioilla C. Myös identtisen funktorin Id_C rajoittuma mihin tahansa kategorian C alikategoriaan on selvästi funktori.

Joskus kirjallisuudessa kategorian C identtiselle funktorille voidaan käyttää myös merkintöjä $\mathrm{Id}_C = I_C = 1_C$.

Esimerkki 4.2. Olkoot C ja D kategorioita ja $d \in \mathrm{Ob}_D$ objekti. Tällöin kuvaus $F \colon C \to D$, $F_{\mathrm{Ob}}(c) = d$ kaikilla $c \in C$, $F_{\mathrm{Mor}}(f) = \mathrm{id}_d$ kaikilla $f \in C$, on selvästi funktori. Tätä kutsutaan *vakiofunktoriksi*, ja sille voi käyttää merkintää Δ_d (ks. [14]).

Esimerkki 4.3. Olkoot C ja D esijärjestyksiä (ks. esimerkki 3.2). Kuvaus $F \colon C \to D$ on tällöin funktori, jos ja vain jos

$$f \in \hom_C(a, b) \implies F(f) \in \hom_D(F(a), F(b));$$

koska esijärjestyksissä on enintään yksi morfismi minkä tahansa objektiparin välillä, loput funktorin määritelmän ehdot seuraavat tästä. Siis F on funktori, jos ja vain jos

$$a \leq b \implies F(a) \leq F(b)$$

ja $F(f)$ on muotoa $F(a) \to F(b)$ kaikilla $f \colon a \to b$. Esijärjestysten väliset funktorit voidaan siis samastaa monotonisten kuvausten kanssa.

Esimerkki 4.4. Olkoot C ja D monoideja (ks. esimerkki 3.3) ja $F \colon C \to D$ kuvaus. Koska molemmissa kategorioissa on tasan yksi objekti, funktorin määritelmän ensimmäinen ehto pätee tälle kuvaukselle. Toinen ehto on tosi, jos ja vain jos $F_{\mathrm{Mor}}(1_C) = 1_D$, ja kolmas on tosi, jos ja vain jos $F(f \cdot_C g) = F(f) \cdot_D F(g)$ kaikilla $f, g \in C$. Siis funktorit monoidien välillä voidaan samastaa monoidihomomorfismien kanssa.

Esimerkki 4.5. Olkoot C, D, E kategorioita. Tällöin kuvaus $F \colon C \times D \to D \times C$, $F(x, y) = (y, x)$, on funktori. Samoin kuvaukset $G \colon (C \times D) \times E \to C \times (D \times E)$, $G\big((x, y), z\big) = \big(x, (y, z)\big)$, ja $G' \colon C \times (D \times E) \to (C \times D) \times E$, $G'\big(x, (y, z)\big) = \big((x, y), z\big)$, ovat funktoreita.

Esimerkki 4.6. Määritellään kuvaus $F \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ seuraavasti. Olkoon kaikilla Abelin ryhmillä c ryhmä $F(c)$ joukko $\{x \in c \mid x^2 = 0\}$ varustettuna ryhmän c laskutoimituksella. Tämä on Abelin ryhmän c aliryhmä. Olkoon myös kaikilla homomorfismeilla $f \colon c \to d$ ja alkioilla $x \in F(c)$ voimassa $F(f)(x) = f(x)$. Koska $0 = f(0) = f(x^2) = f(x)^2$, kun $x^2 = 0$, niin $F(f)$ on tosiaan kuvaus $F(c) \to F(d)$ ja homomorfismin rajoittumana aliryhmään homomorfismi. Lisäksi F selvästi säilyttää identtiset morfismit ja morfismien yhdisteet, joten F on funktori.

Esimerkki 4.7 (vrt. [7, s.14])**.** Kuvaus $F \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, joka kuvaa Abelin ryhmän $(c, \cdot_c)$ joukoksi c ja homomorfismin f kuvaukseksi f, on selvästi funktori. Tätä kutsutaan *unohdusfunktoriksi* Abelin ryhmien kategoriasta joukkojen kategoriaan.

Voidaan määritellä myös unohdusfunktori **Ab** $\to$ **Grp**, joka kuvaa Abelin ryhmän $(c, \cdot_c)$ ryhmäksi $(c, \cdot_c)$ ja homomorfismin f homomorfismiksi f. Vastaavalla tavalla voidaan määritellä monia muitakin unohdusfunktoreita, jotka "unohtavat" jonkin ominaisuuden, mm. unohdusfunktorit renkaista ryhmiin, ryhmistä joukkoihin, topologisista avaruuksista joukkoihin ja K-vektoriavaruuksista Abelin ryhmiin. Monella unohdusfunktorilla on tietynlainen suhde tiettyyn nk. vapaaseen funktoriin, jollainen esitellään seuraavassa esimerkissä. Tämä suhde liittyy liittofunktoreihin.

Esimerkki 4.8 (ks. [7, s. 87])**.** Kuvaus $F\colon$ **Set** $\to$ **Ab**, joka kuvaa joukon X tämän joukon vapaaksi Abelin ryhmäksi ja kuvauksen $f\colon A \to B$ siksi yksikäsitteiseksi homomorfismiksi $F(f)\colon F(A) \to F(B)$, jolla $F(f)(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$, on funktori. Todistetaan tämä. Selvästi funktorin määritelmän ensimmäinen ehto pätee. Todistetaan, että toinen ja kolmas ehto ovat voimassa.

Kaikilla joukoilla X ja alkioilla $x \in X$ pätee, että $F(\mathrm{id}_X)(x) = \mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_{F(X)}(x)$. Koska tämä ehto määrittää morfismin $F(\mathrm{id}_X)$ yksikäsitteisesti, voidaan todeta, että $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Kaikilla $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}$, joilla $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$, ja $x \in \mathrm{dom}(g)$ pätee, että

$$\big(F(f) \circ F(g)\big)(x) = F(f)\big(F(g)(x)\big) = F(f)\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = F(f \circ g)(x).$$

Koska on olemassa tasan yksi morfismi $h\colon F\big(\mathrm{dom}(g)\big) \to F\big(\mathrm{cod}(f)\big)$, jolla pätee, että $h(x) = f\big(g(x)\big)$ kaikilla $x \in \mathrm{dom}(g)$, havaitaan, että $F(f) \circ F(g) = h = F(f \circ g)$.

F on siis funktori. Kuten aiemmin mainittiin, kyseessä on *vapaa funktori* joukkojen kategoriasta Abelin ryhmien kategoriaan.

Esimerkki 4.9 (ks. [3, s. 242–243])**.** Tiedetään, että millä tahansa kuvausten yhdisteellä $f \circ g$ ja osajoukolla $A \subseteq \mathrm{dom}(g)$ pätee, että $(f \circ g)[A] = f\big[g[A]\big]$. Lisäksi $\mathrm{id}_X[A] = A$ kaikilla joukoilla X ja $A \subseteq X$. Siispä voidaan muodostaa funktori $\mathcal{P}^+\colon$ **Set** $\to$ **Set**, joka kuvaa joukon S joukoksi $\mathcal{P}(S)$ ja kuvauksen f kuvaukseksi $A \mapsto f[A]$.

Toisaalta voidaan käyttää kuvauksen $a \mapsto f[a]$, joka kuvaa jokaisen joukon tämän joukon kuvaksi, sijasta kuvausta $a \mapsto f^{-1}[a]$, joka kuvaa jokaisen joukon tämän joukon alkukuvaksi. Jokaisella kuvauksella $f \circ g$ ja osajoukolla $A \subseteq \mathrm{cod}(f)$ pätee, että $(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}\big[f^{-1}[A]\big]$. Lisäksi $\mathrm{id}_X{}^{-1}[A] = A$ kaikilla $A \subseteq X$, joten kuvaus $\mathcal{P}^-\colon$ **Set** $\to$ **Set**, joka kuvaa joukon S joukoksi $\mathcal{P}(S)$ ja kuvauksen f kuvaukseksi $a \mapsto f^{-1}[a]$, on kontravariantti funktori.

Esimerkki 4.10 (ks. [7, s. 33–34])**.** Määritellään kontravariantti duaaliavaruusfunktori $-^*\colon K$-**Vect** $\to K$-**Vect** siten, että se kuvaa jokaisen vektoriavaruuden V duaaliavaruudeksi V^* ja lineaarikuvauksen f duaalikuvaukseksi f^*. Tällöin $\mathrm{id}_c^* = \mathrm{id}_{c^*}$. Jos $f \circ g\colon V \to W$ on määritelty, niin

$$\big\langle v, (f \circ g)^*(w^*)\big\rangle = \big\langle (f \circ g)(v), w^*\big\rangle = \big\langle g(v), f^*(w^*)\big\rangle = \big\langle v, (g^* \circ f^*)(w^*)\big\rangle$$

kaikilla $v \in V$ ja $w \in W^*$, mistä seuraa $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, joten $-^*$ todella on kontravariantti funktori.

Esimerkki 4.11 (ks. [28])**.** Olkoon C lokaalisti pieni kategoria ja $c \in C$ objekti. Tällöin kuvaus $\hom_C(c,-)\colon C \to \mathbf{Set}$,

$$\begin{aligned}\hom_C(c,-)_{\mathrm{Ob}}(c') &= \hom_C(c,c'),\\ \hom_C(c,-)_{\mathrm{Mor}}(f)(g) &= f \circ g,\end{aligned}$$

on funktori. Samalla tavoin voidaan määritellä kontravariantti funktori $\hom_C(-,c)$, jolla

$$\begin{aligned}\hom_C(-,c)_{\mathrm{Ob}}(c') &= \hom_C(c',c) \text{ ja}\\ \hom_C(-,c)_{\mathrm{Mor}}(f)(g) &= g \circ f.\end{aligned}$$

Lause 4.1. *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria ja $c \in C$ objekti. Tällöin pätee yhtäsuuruus* $\hom_C(c,-) = \hom_{C^{\mathrm{op}}}(-,c)$.

Todistus. Funktori $\hom_{C^{\mathrm{op}}}(-,c)$ on kontravariantti, siis muotoa $(C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Siis funktorien lähtö- ja maalikategoriat täsmäävät. Lisäksi

$$\hom_{C^{\mathrm{op}}}(-,c)(d) = \hom_{C^{\mathrm{op}}}(d,c) = \hom_C(c,d) = \hom_C(c,-)(d)$$

ja

$$\hom_{C^{\mathrm{op}}}(-,c)(f)(g) = g \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ g = \hom_C(c,-)(f)(g)$$

mikä todistaa väitteen. □

Lause 4.2. *Funktorit säilyttävät retraktiot: jos f on morfismin g retraktio, niin $F(f)$ on morfismin $F(g)$ retraktio. Vastaava pätee sektioille ja isomorfismeille.*

Todistus. Jos $f \circ g = \mathrm{id}$, niin $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. □

4.2 Funktorikonstruktioita

Yhdiste ja rajoittuma ovat tuttuja esimerkkejä keinoista, joilla uusia kuvauksia voidaan konstruoida ennestään tunnetuista kuvauksista. Esitellään nyt nämä ja muita vastaavanlaisia konstruktioita sovellettuna funktoreihin.

Määritelmä 4.3. Funktorin $F\colon C \to D$ *rajoittuma* kategorian C alikategoriaan C' on kuvaus $F\restriction_{C'}\colon C' \to D$, jolla $F\restriction_{C'}(x) = F(x)$ kaikilla $x \in C'$.

Määritelmä 4.4 (ks. [7, s. 14])**.** Olkoot C, D, E kategorioita ja $F\colon D \to E$ sekä $G\colon C \to D$ funktoreita. Tällöin funktorien F ja G *yhdiste*, $F \circ G$, on kuvausten F ja G yhdiste. Tämä tarkoittaa siis sitä, että $F \circ G = (F_{\mathrm{Ob}} \circ G_{\mathrm{Ob}}) \cup (F_{\mathrm{Mor}} \circ G_{\mathrm{Mor}})$.

Yhdisteelle käytetään usein myös merkintää $F \circ G = FG$.

Määritelmä 4.5 (ks. [36, 37])**.** Olkoot $F_1\colon C \to C'$ ja $F_2\colon D \to D'$ funktoreita. Tällöin $F_1 \times F_2\colon C \times D \to C' \times D'$, $(F_1 \times F_2)(x,y) = \big(F_1(x), F_2(y)\big)$ kaikilla objektipareilla ja morfismipareilla (x,y), on funktorien F_1 ja F_2 *tulo*. Tällaiselle tulolle voidaan tässä tutkielmassa käyttää myös merkintää (F_1, F_2).

Määritelmä 4.6 (ks. [39])**.** Olkoot C_1, C_2 kategorioita. Tällöin *projektio* tulokategoriasta $C_1 \times C_2$ kategoriaan C_1 on kuvaus $\pi_1 \colon C_1 \times C_2 \to C_1$, jolla $\pi_1(x, y) = x$ kaikilla objektipareilla ja morfismipareilla (x, y). Vastaavasti voidaan määritellä funktori π_2.

Määritelmä 4.7 (ks. [17])**.** Olkoon C kategoria. Tällöin kuvaus $C \to C \times C$, jolla $x \mapsto (x, x)$ kaikilla objekteilla ja morfismeilla x, on *diagonaalifunktori*.

Lause 4.3. *Funktorien rajoittumat, yhdisteet ja tulot sekä projektio- ja diagonaalifunktorit ovat selvästi funktoreita.*

Lause 4.4 (ks. [7, s. 33])**.** *Olkoon $F \colon C \to D$ funktori. Tällöin kuvaus F on myös funktori muotoa $C^{\mathrm{op}} \to D^{\mathrm{op}}$.*

Todistus. Morfismin f lähtöobjektille pätee

$$\mathrm{dom}_{C^{\mathrm{op}}}\big(F(f)\big) = \mathrm{cod}_C\big(F(f)\big) = F\big(\mathrm{cod}_C(f)\big) = F\big(\mathrm{dom}_{C^{\mathrm{op}}}(f)\big),$$

ja vastaava pätee maaliobjektille. Lisäksi identtiset morfismit ovat samat kategoriassa ja vastakkaisessa kategoriassa ja

$$F(f \circ^{\mathrm{op}} g) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(f) \circ^{\mathrm{op}} F(g),$$

joten väite on todistettu. □

Jos $F \colon C \to D$ on funktori, kutsutaan sen määräämää funktoria $C^{\mathrm{op}} \to D^{\mathrm{op}}$ sen *vastakkaiseksi funktoriksi*. Käytetään tälle merkintää F^{op}. Vastakkainen funktori F^{op} on duaalinen funktorille F. Esimerkiksi jos $F(c)$ on alkuobjekti, on $F^{\mathrm{op}}(c)$ loppuobjekti. On kuitenkin huomattava, että duaalisuutta soveltaessa funktorien yhdisteiden järjestys ei muutu, toisin kuin morfismien yhdisteiden järjestys (ks. [7, s. 32]). Jos nimittäin yhdiste $F \circ G$ on olemassa, niin $(F \circ G)^{\mathrm{op}} = F^{\mathrm{op}} \circ G^{\mathrm{op}}$, eikä yhdistettä $G^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}$ välttämättä edes ole olemassa.

Määritelmä 4.8 (ks. [3, s. 245])**.** Olkoot C_1, C_2, D kategorioita. Olkoon $c_1 \in C_1$ objekti ja $F \colon C_1 \times C_2 \to D$ kuvaus. Määritellään tällöin kuvaus $F(c_1, -) \colon C_2 \to D$ siten, että se kuvaa objektin c_2 objektiksi $F(c_1, c_2)$ ja morfismin f morfismiksi $F(\mathrm{id}_{c_1}, f)$. Vastaavasti voidaan määritellä kuvaus $F(-, c_2)$. Nämä kuvaukset ovat selvästi funktoreita, jos F on.

Lause 4.5 (ks. [7, s. 37])**.** *Olkoot $F_{c_2} \colon C_1 \to D$ ja $G_{c_1} \colon C_2 \to D$ funktoreita kaikilla $c_1 \in C_1$ ja $c_2 \in C_2$ siten, että $F_{c_2}(c_1) = G_{c_1}(c_2)$. Tällöin on olemassa funktori $H \colon C_1 \times C_2 \to D$ siten, että $H(c_1, -) = G_{c_1}$ ja $H(-, c_2) = F_{c_2}$ kaikilla $c_1 \in C_1$ ja $c_2 \in C_2$, jos ja vain jos*

$$F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g) = G_{c_1'}(g) \circ F_{c_2}(f)$$

kaikilla $f \colon c_1 \to c_1'$ ja $g \colon c_2 \to c_2'$.

Todistus. ($\Rightarrow$) Oletetaan, että on olemassa funktori H siten, että $H(c_1,-) = G_{c_1}$ ja $H(-,c_2) = F_{c_2}$ kaikilla $c_1 \in C_1$ ja $c_2 \in C_2$. Tällöin

$$\begin{aligned}
F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g) &= H(-,c_2')(f) \circ H(c_1,-)(g) \\
&= H(f, \mathrm{id}_{c_2'}) \circ H(\mathrm{id}_{c_1}, g) \\
&= H(f \circ \mathrm{id}_{c_1}, \mathrm{id}_{c_2'} \circ g) \\
&= H(\mathrm{id}_{c_1'} \circ f, g \circ \mathrm{id}_{c_2}) \\
&= H(\mathrm{id}_{c_1'}, g) \circ H(f, \mathrm{id}_{c_2}) \\
&= H(c_1', -)(g) \circ H(-, c_2)(f) \\
&= G_{c_1'}(g) \circ F_{c_2}(f)
\end{aligned}$$

kaikilla $f \colon c_1 \to c_1'$ ja $g \colon c_2 \to c_2'$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g) = G_{c_1'}(g) \circ F_{c_2}(f)$ kaikilla $f \colon c_1 \to c_1'$ ja $g \colon c_2 \to c_2'$. Määritetään kuvaus $H \colon C_1 \times C_2 \to D$ siten, että $H(c_1, c_2) = F_{c_2}(c_1)$ kaikilla $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$ ja $H(f,g) = F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g)$ kaikilla $f \colon c_1 \to c_1'$ ja $g \colon c_2 \to c_2'$. Yhdiste $F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g)$ on ehdon $F_{c_2'}(c_1) = G_{c_1}(c_2')$ nojalla olemassa ja on muotoa $G_{c_1}(c_2) \to F_{c_2'}(c_1')$, eli muotoa $H(c_1, c_2) \to H(c_1', c_2')$. Siis H säilyttää morfismien lähtö- ja maaliobjektit. Selvästi H säilyttää myös identtiset morfismit. Lisäksi

$$\begin{aligned}
H(f' \circ f, g' \circ g) &= F_{c_2''}(f' \circ f) \circ G_{c_1}(g' \circ g) \\
&= F_{c_2''}(f') \circ F_{c_2''}(f) \circ G_{c_1}(g') \circ G_{c_1}(g) \\
&= F_{c_2''}(f') \circ G_{c_1'}(g') \circ F_{c_2'}(f) \circ G_{c_1}(g) \\
&= H(f', g') \circ H(f, g)
\end{aligned}$$

kaikilla $f \colon c_1 \to c_1'$, $f' \colon c_1' \to c_1''$, $g \colon c_2 \to c_2'$ ja $g' \colon c_2' \to c_2''$, joten H on funktori. On myös ilmeistä, että $H(c_1,-) = G_{c_1}$ ja $H(-,c_2) = F_{c_2}$. □

Esimerkki 4.12. Olkoon C lokaalisti pieni kategoria. Aiemmin määriteltiin funktorit $\hom_C(c_1,-)$ ja $\hom_C(-,c_2)$. Koska

$$\hom_C(c_1,-)(c_2) = \hom_C(c_1,c_2) = \hom_C(-,c_2)(c_1)$$

ja

$$\begin{aligned}
\big(\hom_C(c_1',-)(g) \circ \hom_C(-,c_2)(f)\big)(h) &= g \circ h \circ f \\
&= \big(\hom_C(-,c_2')(f) \circ \hom_C(c_1,-)(g)\big)(h)
\end{aligned}$$

kaikilla $c_1, c_2 \in C$, $f \colon c_1 \to c_1'$, $g \colon c_2 \to c_2'$ ja $h \colon c_1' \to c_2$, on edellisen lauseen nojalla olemassa funktori $F \colon C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ siten, että $F(c,-) = \hom(c,-)$ ja $F(-,c) = \hom(-,c)$ kaikilla $c \in C$. Merkitään tätä funktoria tästä lähtien symbolilla $\hom_C = F$.

Tähän asti on käytetty muotoa $F(c,-)$ olevien funktorien arvolle pisteessä x merkintää $F(c,-)(x)$. Tällä tavalla merkinnät ovat pysyneet tietyllä tavalla yhtenäisinä – merkintä $F(c,-)$ on toiminut funktorin nimenä siinä missä muutkin, ja argumentit ovat aina olleet sen jälkeen. Lisäksi tämä on kenties hieman helpottanut sen hahmottamista, mistä funktorista milloinkin on ollut kyse. Käytetään tästä lähtien kuitenkin aiheen parissa usein käytettyä merkintää $F(c,x) = F(c,-)(x)$, missä siis x voi olla joko objekti tai morfismi.

Tässä alaluvussa funktoreista tehdyt havainnot johtavat vielä siihen epämuodolliseen havaintoon, että funktoreita voidaan yhdistellä uusiksi funktoreiksi hyvin samaan tapaan kuin funktioita voidaan yhdistellä uusiksi funktioiksi. Esimerkiksi jos $F\colon (C_1 \times C_2) \times C_3 \to D$ ja $G\colon C_3 \times C_1 \to C_2$ ovat funktoreita, myös kuvaus $H\colon C_1 \to D$, $x_1 \mapsto F(x_1, G(c_3, x_1), c_3)$, missä $c_3 \in C_3$, on funktori. Näin siksi, että

$$H = F \circ \Big(\big(\mathrm{Id}_{C_1} \times \big(G \circ (\Delta_{c_3} \times \mathrm{Id}_{C_1}) \circ \mathrm{Diag}\big)\big) \times \Delta_{c_3}\Big) \circ (\mathrm{Diag} \times \mathrm{Id}_{C_1}) \circ \mathrm{Diag},$$

missä Diag on diagonaalifunktori $C_1 \to C_1 \times C_1$.

4.3 Kategorioiden isomorfisuus

Kuten mm. ryhmäteoriassa, jossa on määritelty isomorfisuuden ominaisuus kahden ryhmän välillä, myös kategoriateoriassa voidaan määritellä kategorioiden isomorfisuus.

Määritelmä 4.9 (ks. [21])**.** Olkoot C ja D kategorioita. Jos on olemassa funktorit $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ siten, että $F \circ G = \mathrm{Id}_C$ ja $G \circ F = \mathrm{Id}_D$, niin kategoriat C ja D ovat *isomorfisia* ja nämä funktorit ovat *isomorfismeja*.

Esimerkki 4.13. Olkoot C, D ja E kategorioita. Tällöin

- kuvaus $c \mapsto (0, c)$, $f \mapsto (\mathrm{id}_0, f)$, on isomorfismi kategoriasta C kategoriaan $\mathbf{1} \times C$,
- kuvaus $(x, y) \mapsto (y, x)$ on isomorfismi kategoriasta $C \times D$ kategoriaan $D \times C$ ja
- kuvaus $\big((x, y), z\big) \mapsto \big(x, (y, z)\big)$ on isomorfismi kategoriasta $(C \times D) \times E$ kategoriaan $C \times (D \times E)$.

Ensimmäisessä tapauksessa käänteisfunktori on kanoninen projektio $\mathbf{1} \times C \to C$, joka on tunnetusti funktori. Toisessa ja kolmannessa tapauksessa käänteisfunktori on ilmeinen.

Kategorioiden tulo on siis isomorfiaa vaille assosiatiivinen. On siksi perusteltua jättää sulut pois useamman kuin kahden kategorian tulosta. Lisäksi kategorioiden tulolla on neutraalialkio $\mathbf{1}$, joten on mielekästä määritellä kategorian C potenssi C^n kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että $C^0 = \mathbf{1}$ ja $C^{n+1} = C^n \times C$.

Nyt on määritelty kaksi eri isomorfismia: objektien välinen isomorfismi, joka on morfismi, sekä kategorioiden välinen isomorfismi, joka on funktori. Näitä ei ole kuitenkaan tarpeen pitää toisistaan täysin erillisinä käsitteinä. Jokaisella funktorilla on lähtö- ja maalikategoria, ja funktorien $F\colon C_1 \to C_2$ ja $G\colon D_1 \to D_2$ yhdiste $G \circ F$ on määritelty täsmälleen silloin, kun $C_2 = D_1$. Lisäksi jokaisella kategorialla C on identtinen funktori Id_C, joka on funktorien yhdisteen kannalta neutraali, ja funktorien yhdiste on kuvausten yhdisteenä assosiatiivinen. Kategorioilla ja funktoreilla on siis samanlaisia ominaisuuksia kuin kategorian objekteilla ja morfismeilla. Jos voitaisiin muodostaa "kaikkien kategorioiden kategoria", jossa objekteina ovat kaikki kategoriat ja morfismeina $C \to D$ kaikki funktorit $C \to D$, voitaisiin isomorfismifunktorit samastaa tämän kategorian isomorfismien kanssa. Tällaisen kategorian muodostaminen on tietysti joukko-opillisesti ongelmallista. Monissa joukko-opin aksioomajärjestelmissä voidaan kuitenkin muodostaa kaikkien pienten kategorioiden kategoria.

Määritelmä 4.10 (ks. [13])**.** Olkoon Ob pienten kategorioiden luokka. Olkoon $\hom(c, d)$ kaikkien funktorien $c \to d$ joukko kaikilla $c, d \in \mathrm{Ob}$. Nämä varustettuna funktorien yhdisteellä muodostavat *pienten kategorioiden kategorian* **Cat**, joka on todella edellä havaitun perusteella kategoria.

Lause 4.6. *Olkoot C ja D pieniä kategorioita ja $F\colon C \to D$ funktori. Tällöin suoraan määritelmien nojalla F on kategorioiden C ja D välinen isomorfismi, jos ja vain jos se on objektien C ja D välinen isomorfismi kategoriassa* **Cat***.*

5 Luonnolliset transformaatiot

Jotta liittofunktorit voitaisiin myöhemmin määritellä, pitää vielä määritellä luonnollisen transformaation käsite. Tämä on yksi oleellisimpia kategoriateorian käsitteitä. Oikeastaan kategorian ja funktorin käsitteet on alunperin määritelty, jotta voitaisiin käsitellä luonnollisia transformaatioita (ks. [7, s.18]).

5.1 Luonnollisen transformaation määritelmä

Määritellään aluksi luonnolliset transformaatiot sekä esitetään joitakin esimerkkejä ja pienempiä lauseita niihin liittyen.

On monia kuvauksia, ryhmähomomorfismeja, lineaarikuvauksia ynnä muita (yleisesti ottaen morfismeja), joita voidaan luonnehtia ”luonnollisiksi”. Esimerkiksi jokaisesta joukosta S voidaan helposti löytää kaksi tällaista luonnollista kuvausta potenssijoukkoon $\mathcal{P}(S)$, nimittäin kuvaukset $x \mapsto \emptyset$ ja $x \mapsto \{x\}$. Samoin jokaisesta vektoriavaruudesta V on olemassa luonnollinen lineaarikuvaus biduaaliavaruuteen V^{**}, nimittäin se yksikäsitteinen lineaarikuvaus f, jolla $\langle v, v^* \rangle = \langle v^*, f(v) \rangle$ kaikilla $v \in V, v^* \in V^*$. Tällainen luonnollisuus ymmärretään intuitiivisesti – sitä ei ole määritelty. Luonnolliset transformaatiot tuovat täsmällisen merkityksen sanalle ”luonnollinen”. Tämä määritelty luonnollisuus vastaa usein edellä tarkasteltua intuitiivista luonnollisuutta.

Määritelmä 5.1 (ks. [7, s. 16])**.** Olkoot C ja D kategorioita ja $F, G\colon C \to D$ funktoreita. Olkoon $\eta\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$ kuvaus. Jos

- kaikilla $c \in C$ morfismi $\eta(c)$ on muotoa $F(c) \to G(c)$ ja
- kaikilla $c_1, c_2 \in C$ ja $f \in \hom_C(c_1, c_2)$ pätee *luonnollisuusehto*

  $$\eta(c_2) \circ F(f) = G(f) \circ \eta(c_1),$$

  eli kaavio

  $$\begin{tikzcd} F(c_1) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(c_1)"] & F(c_2) \arrow[d, "\eta(c_2)"] \\ G(c_1) \arrow[r, "G(f)"] & G(c_2) \end{tikzcd}$$

  kommutoi,

niin η on *luonnollinen transformaatio* funktorista F funktoriin G ja luokan $\mathrm{ran}(\eta)$ alkiot ovat tämän luonnollisen transformaation *komponentteja*. Merkinnällä $\eta\colon F \Rightarrow G$ tarkoitetaan, että η on luonnollinen transformaatio funktorista F funktoriin G. Jos kaikki komponentit ovat isomorfismeja, voidaan puhua *luonnollisesta isomorfismista*.

Tavanomaisesti alan kirjallisuudessa luonnollisen transformaation η komponentille pisteessä c käytetään merkintää η_c. Tässä tutkielmassa käytetään merkintää $\eta(c)$ joidenkin ala- ja yläindeksimerkintöjen selkeyttämiseksi.

Luonnollisille transformaatioille käytetään tässä tutkielmassa tavanomaisesti symboleita η, ϵ ja ε.

Esimerkki 5.1. Olkoon $F\colon C \to D$ funktori. Tällöin kuvaus $\mathrm{id}_F\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$, $c \mapsto \mathrm{id}_{F(c)}$ on selvästi luonnollinen isomorfismi $F \Rightarrow F$.

Esimerkki 5.2. Olkoon D kategoria, jossa on nollaobjekti. Olkoot $F, G\colon C \to D$ funktoreita. Olkoon $\eta\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$ kuvaus, jonka arvo $\eta(c)$ on nollamorfismi $F(c) \to G(c)$ kaikilla $c \in C$. Tällöin η on luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow G$, sillä luonnollisuusehto on sille voimassa nollamorfismien tunnettujen ominaisuuksien nojalla.

Esimerkki 5.3. Tarkastellaan kuvauksia $\eta(S)\colon S \to \mathcal{P}(S)$, $x \mapsto \{x\}$, missä parametri S on joukko. Nämä muodostavat luonnollisen transformaation $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathcal{P}^+$, sillä luonnollisuusehto

$$\big(\eta(S') \circ f\big)(x) = \{f(x)\} = f[\{x\}] = \big(\mathcal{P}^+(f) \circ \eta(S)\big)(x)$$

on voimassa kaikille $f\colon S \to S'$ ja $x \in S$. Samoin kuvaukset $\varepsilon(S)\colon S \to \mathcal{P}(S)$, $x \mapsto \emptyset$, muodostavat luonnollisen transformaation $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathcal{P}^+$, sillä

$$\big(\varepsilon(S') \circ f\big)(x) = \emptyset = f[\emptyset] = \big(\mathcal{P}^+(f) \circ \varepsilon(S)\big)(x)$$

kaikilla $f\colon S \to S'$ ja $x \in S$.

Toisaalta kuvaukset $\epsilon(S)\colon S \to \mathcal{P}(S)$, $x \mapsto S$, eivät muodosta luonnollista transformaatiota $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathcal{P}^+$, vaikka niitä voikin ehkä pitää intuitiivisesti luonnollisina. Jos nimittäin $|S| \geq 2$, $x \in S$ ja $f\colon S \to S$ on vakiofunktio, niin

$$\big(\epsilon(S) \circ f\big)(x) = S \neq f[S] = \big(\mathcal{P}^+(f) \circ \epsilon(S)\big)(x),$$

eli luonnollisuusehto ei ole yleisesti voimassa.

Esimerkki 5.4 (ks. [3, s. 232–233], [62])**.** Aiemmin määriteltiin kontravariantti duaaliavaruusfunktori $-^*\colon K\text{-}\mathbf{Vect} \to K\text{-}\mathbf{Vect}$. Se on siis kovariantti funktori $K\text{-}\mathbf{Vect}^{\mathrm{op}} \to K\text{-}\mathbf{Vect}$, joten yhdiste $-^{**} = -^* \circ (-^*)^{\mathrm{op}}\colon K\text{-}\mathbf{Vect} \to K\text{-}\mathbf{Vect}$ on olemassa. Käsitellään tätä.

Olkoon $\eta(V)$ kaikilla vektoriavaruuksilla $V \in K\text{-}\mathbf{Vect}$ se yksikäsitteinen lineaarikuvaus $V \to V^{**}$, jolla $\langle v, v^* \rangle = \big\langle v^*, \eta(V)(v) \big\rangle$ kaikilla $v \in V$ ja $v^* \in V^*$. Olkoon $f\colon V \to W$ mielivaltainen lineaarikuvaus. Tällöin

$$\Big\langle w^*, \big(\eta(W) \circ \mathrm{Id}(f)\big)(v) \Big\rangle = \Big\langle w^*, \big(\eta(W) \circ f\big)(v) \Big\rangle = \big\langle f(v), w^* \big\rangle$$

kaikilla $v \in V$, $w^* \in W^*$. Toisaalta myös

$$\Big\langle w^*, \big(f^{**} \circ \eta(V)\big)(v) \Big\rangle = \big\langle f^*(w^*), \eta(V)(v) \big\rangle = \big\langle v, f^*(w^*) \big\rangle = \big\langle f(v), w^* \big\rangle$$

kaikilla $v \in V$, $w^* \in W^*$. Siis $\big(\eta(W) \circ \mathrm{Id}(f)\big)(v) = \big(f^{**} \circ \eta(V)\big)(v)$ kaikilla $v \in V$, eli $\eta(W) \circ \mathrm{Id}(f) = f^{**} \circ \eta(V)$. Siis $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow -^{**}$ on luonnollinen transformaatio.

Esimerkki 5.5. Olkoot C, D esijärjestyksiä ja $F, G\colon C \to D$ funktoreita. Millaisia ovat luonnolliset transformaatiot $\eta\colon F \Rightarrow G$? Näitä luonnollisia transformaatioita on enintään yksi kappale, sillä myös morfismeja $F(c) \to G(c)$ on enintään yksi kappale kaikilla $c \in C$. Tämä yksikäsitteinen luonnollinen transformaatio on olemassa, jos ja vain jos morfismi $F(c) \to G(c)$ on olemassa, eli $F(c) \leq G(c)$, kaikilla $c \in C$. Jos nämä morfismit nimittäin ovat olemassa, niin luonnollisuusehto seuraa suoraan esijärjestyksen rakenteesta – kaksi morfismia samojen objektien välillä ovat väistämättä samat.

Esimerkki 5.6. Esimerkissä 4.6 tarkasteltiin funktoria $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$, joka "valitsee" jokaisesta ryhmästä niiden alkioiden aliryhmän, joiden neliö on neutraalialkio. Olkoon kaikilla Abelin ryhmillä c kuvaus $\eta(c)\colon F(c) \to c$ kanoninen upotus. Tällöin $\big(\eta(c') \circ F(f)\big)(x) = \eta(c')\big(f(x)\big) = f(x) = f\big(\eta(c)(x)\big) = \big(f \circ \eta(c)\big)(x)$ kaikilla $f\colon c \to c'$ ja $x \in F(c)$, joten η on luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow \mathrm{Id}$.

Määritelmä 5.2. Olkoon $F\colon C_1 \times C_2 \to D$ funktori ja $c_1, c_1' \in C_1$ objekteja. Olkoon $f_1\colon c_1 \to c_1'$ morfismi. Määritellään tällöin kuvaus $F(f_1, -)\colon \mathrm{Ob}_{C_2} \to \mathrm{Mor}_D$ siten, että kaikilla $c_2 \in C_2$ pätee $F(f, -)(c_2) = F(f, c_2)$. Samalla tavoin määritellään kuvaus $F(-, f_2)$, missä $f_2 \in C_2$ on morfismi.

Lause 5.1. *Edellisen määritelmän merkinnöin kuvaus $F(f_1, -)$ on luonnollinen transformaatio $F(c_1, -) \Rightarrow F(c_1', -)$. Vastaava pätee kuvaukselle $F(-, f_2)$.*

Todistus. Luonnollisuusehto saattaa tuoda mieleen aiemmin esitetyn lauseen 4.5. Väite seuraakin suoraan tästä ja määritelmistä. □

Lause 5.2. *Olkoon C diskreetti kategoria ja D kategoria. Olkoot $F, G\colon C \to D$ funktoreita. Tällöin mikä tahansa kuvaus $\eta\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$, jolla $\eta(c)$ on muotoa $F(c) \to G(c)$ kaikilla $c \in C$, on luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow G$.*

Todistus. Kategoriassa C on ainoastaan identtisiä morfismeja, ja millä tahansa morfismilla $\eta(c)\colon F(c) \to G(c)$ pätee $\eta(c) \circ F(\mathrm{id}_c) = \eta(c) = G(\mathrm{id}_c) \circ \eta(c)$. □

5.2 Luonnollisten transformaatioiden konstruoinnista

Kuten funktoreista, myös luonnollisista transformaatioista voidaan muodostaa yhdisteitä, rajoittumia ynnä muita konstruktioita. Määritellään ja tarkastellaan joitakin tällaisia konstruktioita.

Määritelmä 5.3. Olkoon C kategoria ja C' sen alikategoria. Olkoon D kategoria ja olkoot $F, G\colon C \to D$ funktoreita. Olkoon $\eta\colon F \Rightarrow G$ luonnollinen transformaatio. Tällöin kuvaus $\eta\restriction_{C'} := \eta\restriction_{Ob_{C'}}$ on luonnollisen transformaation η *rajoittuma kategoriaan C*.

Lause 5.3. *Edellisen määritelmän merkinnöin $\eta\restriction_{C'}$ on luonnollinen transformaatio $F\restriction_{C'} \Rightarrow G\restriction_{C'}$.*

Todistus. Koska $\eta(c)$ on muotoa $F(c) \to G(c)$ kaikilla $c \in C$, niin tietysti $\eta(c')$ on muotoa $F\restriction_{C'}(c') \to G\restriction_{C'}(c')$ kaikilla $c' \in C'$. Samoin luonnollisuusehto on selvästi voimassa. □

Esimerkki 5.7. Olkoon $\eta\colon \mathrm{Id}_{K\text{-}\mathbf{Vect}} \Rightarrow -^{**}$ esimerkin 5.4 luonnollinen transformaatio. Tällöin $\eta\restriction_{K\text{-}\mathbf{FinVect}}$ on luonnollinen transformaatio; tunnetusti kyseessä on vieläpä luonnollinen isomorfismi.

Määritelmä 5.4 (ks. [34])**.** Olkoot $F, G, H\colon C \to D$ funktoreita ja $\eta\colon F \Rightarrow G$ ja $\varepsilon\colon G \Rightarrow H$ luonnollisia transformaatioita. Tällöin kuvaus $\varepsilon \circ \eta\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$, $(\varepsilon \circ \eta)(c) = \varepsilon(c) \circ \eta(c)$, on luonnollisten transformaatioiden ε ja η *yhdiste*.

Lause 5.4. *Edellisen määritelmän merkinnöin $\varepsilon \circ \eta$ on luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow H$.*

Todistus. Kaikilla $c_1, c_2 \in C$ ja $f\colon c_1 \to c_2$ pätee, että

- $(\varepsilon \circ \eta)(c_1) = \varepsilon(c_1) \circ \eta(c_1)$ on morfismi $F(c_1) \to H(c_1)$ ja
- $\varepsilon(c_2) \circ \eta(c_2) \circ F(f) = \varepsilon(c_2) \circ G(f) \circ \eta(c_1) = H(f) \circ \varepsilon(c_1) \circ \eta(c_1)$,

joten $\varepsilon \circ \eta$ on todella luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow H$. Havainnollistetaan asiaa toteamalla, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
F(c_1) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(c_1)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\varepsilon\circ\eta)(c_1)"'] & F(c_2) \arrow[d, "\eta(c_2)"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\varepsilon\circ\eta)(c_2)"] \\
G(c_1) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\varepsilon(c_1)"] & G(c_2) \arrow[d, "\varepsilon(c_2)"'] \\
H(c_1) \arrow[r, "H(f)"] & H(c_2)
\end{tikzcd}$$

kommutoi. □

Määritelmä 5.5. Olkoot $F, G\colon C_1 \times C_2 \to D$ funktoreita, $\eta\colon \mathrm{Ob}_{C_1\times C_2} \to \mathrm{Mor}_D$ kuvaus ja $c_1 \in C_1$ objekti. Määritellään tällöin kuvaus $\eta(c_1, -)\colon \mathrm{Ob}_{C_2} \to \mathrm{Mor}_D$ siten, että $\eta(c_1, -)(c_2) = \eta(c_1, c_2)$. Vastaavalla tavalla määritellään kuvaus $\eta(-, c_2)$.

Lause 5.5. *Olkoot $F, G\colon C_1 \times C_2 \to D$ funktoreita ja $\eta\colon \mathrm{Ob}_{C_1\times C_2} \to \mathrm{Mor}_D$ kuvaus. Tällöin η on luonnollinen transformaatio $F \to G$, jos ja vain jos $\eta(c_1, -)$ on luonnollinen transformaatio $F(c_1, -) \Rightarrow G(c_1, -)$ ja $\eta(-, c_2)$ on luonnollinen transformaatio $F(-, c_2) \Rightarrow G(-, c_2)$ kaikilla $c_1 \in C_1$ ja $c_2 \in C_2$.*

Todistus. Suunta ($\Rightarrow$) seuraa melko suoraan määritelmistä. Todistetaan suunta ($\Leftarrow$).

Oletetaan, että $\eta(c_1, -)$ on luonnollinen transformaatio $F(c_1, -) \Rightarrow G(c_1, -)$ ja $\eta(-, c_2)$ luonnollinen transformaatio $F(-, c_2) \Rightarrow G(-, c_2)$ kaikilla $c_1 \in C_1$ ja $c_2 \in C_2$. Tällöin $\eta(c_1, c_2)$ on muotoa $F(c_1, c_2) \to G(c_1, c_2)$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\eta(c_1', c_2') \circ F(f, g) &= \eta(c_1', c_2') \circ F(c_1', g) \circ F(f, c_2) \\
&= G(c_1', g) \circ \eta(c_1', c_2) \circ F(f, c_2) \\
&= G(c_1', g) \circ G(f, c_2) \circ \eta(c_1, c_2) \\
&= G(f, g) \circ \eta(c_1, c_2)
\end{aligned}$$

kaikilla $f\colon c_1 \to c_1'$ ja $g\colon c_2 \to c_2'$, joten η on luonnollinen transformaatio. □

Lause 5.6. *Olkoot $F, F'\colon D \to E$, $G, G'\colon C \to D$ funktoreita ja $\eta_F\colon F \Rightarrow F'$ ja $\eta_G\colon G \Rightarrow G'$ luonnollisia transformaatioita. Tällöin $\varepsilon\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_E$,*

$$\varepsilon(c) = \eta_F\big(G'(c)\big) \circ F\big(\eta_G(c)\big) = F'\big(\eta_G(c)\big) \circ \eta_F\big(G(c)\big),$$

on luonnollinen transformaatio $F \circ G \Rightarrow F' \circ G'$. Tämä on luonnollinen isomorfismi, jos η_F ja η_G ovat.

Todistus. Olkoon $c \in C$ objekti. Tällöin $F\big(\eta_G(c)\big)$ on muotoa $F\big(G(c)\big) \to F\big(G'(c)\big)$. Edelleen $\eta_F\big(G'(c)\big)$ on muotoa $F\big(G'(c)\big) \to F'\big(G'(c)\big)$. Siis $\varepsilon(c)$ on haluttua muotoa $F\big(G(c)\big) \to F'\big(G'(c)\big)$, ja

$$\begin{aligned}
\varepsilon(c_2) \circ (F \circ G)(f) &= \eta_F\big(G'(c_2)\big) \circ F\big(\eta_G(c_2') \circ F\big(G(f)\big)\\
&= \eta_F\big(G'(c_2)\big) \circ F\big(\eta_G(c_2) \circ G(f)\big)\\
&= \eta_F\big(G'(c_2)\big) \circ F\big(G'(f) \circ \eta_G(c_1)\big)\\
&= \eta_F\big(G'(c_2)\big) \circ F\big(G'(f)\big) \circ F\big(\eta_G(c_1)\big)\\
&= F'\big(G'(f)\big) \circ \eta_F\big(G'(c_1)\big) \circ F\big(\eta_G(c_1)\big)\\
&= (F' \circ G')(f) \circ \varepsilon(c_1)
\end{aligned}$$

kaikilla $f\colon c_1 \to c_2$, joten ε on luonnollinen transformaatio $F \circ G \Rightarrow F' \circ G'$. Lauseen loppuosa seuraa lauseista 3.6 ja 4.2.

Lausetta voidaan selventää myös kaaviolla

$$\begin{tikzcd}
(F \circ G)(c_1) \arrow[r, "(F\circ G)(f)"] \arrow[d, "F(\eta_G(c_1))"] & (F \circ G)(c_2) \arrow[d, "F(\eta_G(c_2))"] \\
(F \circ G')(c_1) \arrow[r, "(F\circ G')(f)"] \arrow[d, "\eta_F(G'(c_1))"] & (F \circ G')(c_2) \arrow[d, "\eta_F(G'(c_2))"] \\
(F' \circ G')(c_1) \arrow[r, "(F'\circ G')(f)"] & (F' \circ G')(c_2),
\end{tikzcd}$$

joka on siis havaittu kommutoivaksi kaikilla $f\colon c_1 \to c_2$. □

Erityisesti jos edellisessä lauseessa $F = F'$ ja $\eta_F = \mathrm{id}_F$, niin $\varepsilon(c)$ yksinkertaistuu muotoon $F\big(\eta_G(c)\big)$. Vastaavasti jos $G = G'$ ja $\eta_G = \mathrm{id}_G$, niin $\varepsilon(c) = \eta_F\big(G(c)\big)$.

Seuraus 5.7. *Jos $F_1, F_1'\colon C_1 \to C_2, \ldots, F_n, F_n'\colon C_n \to C_{n+1}$ ovat funktoreita ja kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$ on olemassa luonnollinen isomorfismi $F_k \Rightarrow F_k'$, niin on olemassa luonnollinen isomorfismi $F_n \circ \cdots \circ F_1 \Rightarrow F_n' \circ \cdots \circ F_1'$.*

Määritelmä 5.6 (ks. [25])**.** Lauseessa 5.6 esiteltyä luonnollista transformaatiota ε kutsutaan luonnollisten transformaatioiden η_F ja η_G *Godementin tuloksi*. Käytetään tälle merkintää $\eta_F * \eta_G$. Jos $\eta_F = \mathrm{id}_F$, voidaan käyttää myös merkintää $F * \eta_G$, ja vastaavasti jos $\eta_G = \mathrm{id}_G$, voidaan käyttää merkintää $\eta_F * G$.

Kirjallisuudessa käytetään usein myös merkintöjä $F * \eta_G = F\eta_G$ ja $\eta_F * G = \eta_F G$.

Yleisesti ottaen Godementin tulojen yhdistettä $(\eta * \varepsilon_1) \circ (\eta * \varepsilon_2)$ ei ole olemassa, vaikka kyseiset Godementin tulot ja yhdiste $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$ olisivat. Jos kuitenkin lisäksi $\mathrm{dom}(\eta(c)) = \mathrm{cod}(\eta(c))$ kaikilla $c \in \mathrm{dom}(\eta)$, niin tämä Godementin tulojen yhdiste on olemassa. Vastaava pätee yhdisteelle $(\epsilon_1 * \eta) \circ (\epsilon_2 * \eta)$. Erityisesti jos $\eta = \mathrm{id}$, saadaan seuraavat yksinkertaiset laskusäännöt.

Apulause 5.8. *Olkoot $F_1, F_2, F_3 \colon C \to D$ funktoreita ja $\eta \colon F_1 \Rightarrow F_2$, $\varepsilon \colon F_2 \Rightarrow F_3$ luonnollisia transformaatioita. Tällöin*

- *kaikilla funktoreilla $G \colon D \to E$ pätee, että $(G * \varepsilon) \circ (G * \eta) = G * (\varepsilon \circ \eta)$ ja*
- *kaikilla funktoreilla $G \colon E \to C$ pätee, että $(\varepsilon * G) \circ (\eta * G) = (\varepsilon \circ \eta) * G$.*

Todistus. Ensimmäinen kohta todistetaan havaitsemalla, että

$$\begin{aligned}
\big((G * \varepsilon) \circ (G * \eta)\big)(c) &= G\big(\varepsilon(c)\big) \circ G\big(\eta(c)\big) \\
&= G\big(\varepsilon(c) \circ \eta(c)\big) \\
&= \big(G * (\varepsilon \circ \eta)\big)(c)
\end{aligned}$$

kaikilla $c \in C$. Toinen kohta taas havaitaan siitä, että

$$\begin{aligned}
\big((\varepsilon * G) \circ (\eta * G)\big)(e) &= \varepsilon\big(G(e)\big) \circ \eta\big(G(e)\big) \\
&= (\varepsilon \circ \eta)\big(G(e)\big) \\
&= \big((\varepsilon \circ \eta) * G\big)(e)
\end{aligned}$$

kaikilla $e \in E$. $\square$

Apulause 5.9. *Olkoon $F \colon C \to C$ funktori ja $\eta \colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow F$ luonnollinen isomorfismi. Tällöin $\eta * F = F * \eta$ ja $\eta^{-1} * F = F * \eta^{-1}$. Jos lisäksi $F(c) = c$ kaikilla $c \in C$, niin $F * \eta = \eta$ ja $F * \eta^{-1} = \eta^{-1}$.*

Todistus. Koska kaikilla $c \in C$

$$\begin{aligned}
F\big(\eta^{-1}(c)\big) \circ F\big(\eta(c)\big) &= F\big(\eta^{-1}(c) \circ \eta(c)\big) \\
&= F(\mathrm{id}_c) \\
&= \mathrm{id}_{F(c)} \\
&= \eta(c) \circ \eta^{-1}(c) \\
&= F\big(\eta^{-1}(c)\big) \circ \eta\big(F(c)\big)
\end{aligned}$$

ja $F * \eta^{-1}$ on luonnollinen isomorfismi, niin $F\big(\eta(c)\big) = \eta\big(F(c)\big)$ kaikilla $c \in C$. Samankaltaisella perustelulla $F * \eta^{-1} = \eta^{-1} * F$. Jos nyt $F(c) = c$ kaikilla $c \in C$, niin pätevät $(\eta * F)(c) = \eta\big(F(c)\big) = \eta(c)$ ja $(\eta^{-1} * F)(c) = \eta^{-1}\big(F(c)\big) = \eta^{-1}(c)$ kaikilla $c \in C$, mikä lauseen alkuosan kanssa todistaa viimeisen väitteen. $\square$

Lause 5.10. *Olkoot $F, G \colon C \to D$ funktoreita ja $\eta \colon F \Rightarrow G$ luonnollinen transformaatio. Tällöin η on myös luonnollinen transformaatio $G^{\mathrm{op}} \Rightarrow F^{\mathrm{op}}$.*

Todistus. Morfismi $\eta(c)$ on kategoriassa D^{op} muotoa $G^{\mathrm{op}}(c) \to F^{\mathrm{op}}(c)$ kaikilla $c \in C^{\mathrm{op}}$. Lisäksi kaikilla $f\colon c \to c'$ kategoriassa C pätee

$$\eta(c') \circ F(f) = G(f) \circ \eta(c),$$

joten myös

$$F^{\mathrm{op}}(f) \circ \eta(c') = \eta(c) \circ G^{\mathrm{op}}(f).$$

kaikilla morfismeilla $f\colon c' \to c$ kategoriassa C^{op}. □

Jos $\eta\colon F \Rightarrow G$ on luonnollinen transformaatio, kutsutaan sen määräämää luonnollista transformaatiota $G^{\mathrm{op}} \Rightarrow F^{\mathrm{op}}$ sen *vastakkaiseksi luonnolliseksi transformaatioksi*. Käytetään tälle merkintää η^{op}. Vastakkainen luonnollinen transformaatio η^{op} on duaalinen luonnolliselle transformaatiolle η. Samoin kuin morfismien tapauksessa, mutta toisin kuin funktorien tapauksessa, duaalisuuden soveltaminen luonnollisten transformaatioiden yhdisteisiin kääntää niiden järjestyksen: jos $\eta \circ \varepsilon$ on määritelty, niin $(\eta \circ \varepsilon)^{\mathrm{op}} = \varepsilon^{\mathrm{op}} \circ \eta^{\mathrm{op}}$.

5.3 Funktorikategoria

Aiemmin havaittiin, että funktorien voi ajatella olevan kategorioiden välisiä morfismeja. Toisaalta seuraavan määritelmän valossa luonnollisten transformaatioiden voi ajatella olevan funktorien välisiä morfismeja.

Määritelmä 5.7 (ks. [24])**.** Olkoot C, D kategorioita. Olkoon Ob kovarianttien funktorien $C \to D$ luokka ja $\hom(F, G)$ luonnollisten transformaatioiden $F \Rightarrow G$ luokka kaikilla $F, G \in \mathrm{Ob}$. Olkoon vielä $\circ$ luonnollisten transformaatioiden yhdiste. Nämä määräävät yhdessä *funktorikategorian* D^C.

Huomautus. Riippuu kategorioista C ja D sekä käytetyistä aksioomista, onko olemassa funktorien $C \to D$ luokkaa. Siksi myös funktorikategorian D^C olemassaolo riippuu näistä seikoista. Tässä tutkielmassa oletetaan, että kaikki käsiteltävät funktorikategoriat on olemassa käytetyssä aksioomajärjestelmässä. Tätä aihetta tarkastellaan tarkemmin luvussa 7.

Lause 5.11. *Funktorikategoria on kategoria.*

Todistus. Luonnollisten transformaatioiden yhdiste on määritelty komponenteittain, ja komponenttien yhdiste on assosiatiivinen, joten luonnollisten transformaatioiden yhdiste on myös assosiatiivinen. Lisäksi identtinen luonnollinen transformaatio id_F on olemassa kaikilla funktoreilla F. □

Tässä tutkielmassa funktorikategorioita käsiteltäessä niitä symboleita, joilla tavanomaisesti viitataan funktoreihin, käytetään kyseisten kategorioiden objekteille. Vastaavasti luonnollisiin transformaatioihin liitetyillä symboleilla viitataan morfismeihin. Esimerkiksi siis $F \in D^C$ luetaan ”F on objekti funktorikategoriassa D^C”, ja $\exists \eta \in D^C$ luetaan ”on olemassa morfismi η funktorikategoriassa D^C”.

Esimerkki 5.8. Olkoon J diskreetti kategoria, jossa on $k \in \mathbb{N}$ objektia $j_1, \ldots, j_k$. Tarkastellaan kategorioita C^k ja C^J.

Määritellään ensiksi kuvaus $F\colon C^k \to C^J$ siten, että $F(c_1, \ldots, c_k)(j_n) = c_n$, $F(c_1, \ldots, c_k)(\mathrm{id}_{j_n}) = \mathrm{id}_{c_n}$ ja $F(f_1, \ldots, f_k)(j_n) = f_n$ kaikilla $1 \leq n \leq k$. Ensiksi havaitaan, että $F(c_1, \ldots, c_k)$ on todella funktori $J \to C$ ja $F(f_1, \ldots, f_k)$ luonnollinen transformaatio $F(c_1, \ldots, c_k) \Rightarrow F(c_1', \ldots, c_k')$ kaikilla $f_i\colon c_i \to c_i'$. Lisäksi määritelmistä seuraa melko suoraan, että $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$ ja $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ kaikilla $c = (c_1, \ldots, c_k) \in C^k$ ja $f = (f_1, \ldots, f_k), g = (g_1, \ldots, g_k) \in C^k$.

Määritellään sitten $G\colon C^J \to C^k$ siten, että kaikilla funktoreilla $H\colon J \to C$ pätee $G(H) = \big(H(j_1), \ldots, H(j_k)\big)$ ja kaikilla $\eta\colon H \Rightarrow H'$ pätee $G(\eta) = \big(\eta(j_1), \ldots, \eta(j_k)\big)$. Luonnollisen transformaation määritelmästä seuraa, että tällöin $G(\eta)$ on muotoa $G(H) \to G(H')$ kaikilla $\eta\colon H \Rightarrow H'$. Lisäksi $G(\mathrm{id}_H) = \mathrm{id}_{(H(j_1),\ldots,H(j_k))}$ kaikilla $H\colon J \to C$ ja $G(\eta \circ \varepsilon) = G(\eta) \circ G(\varepsilon)$ kaikilla $\eta, \varepsilon \in C^J$, joilla $\eta \circ \varepsilon$ on määritelty, joten myös G on funktori.

Lopuksi havaitaan, että $G\big(F(c)\big) = c$, $G\big(F(f)\big) = f$, kun $c = (c_1, \ldots, c_k) \in C^k$ ja $f = (f_1, \ldots, f_k) \in C^k$. Samoin $F\big(G(H)\big) = H$ ja $F\big(G(\eta)\big) = \eta$ kaikilla $H \in C^J$ ja $\eta \in C^J$.

Siis F ja G ovat isomorfismeja ja $C^J \cong C^k$.

Luonnollisen transformaation määritelmä saattoi tuoda lukijan mieleen ketjukuvaukset. Seuraavassa esimerkissä havaitaankin, että ketjukompleksit voidaan esittää tietynlaisina funktoreina ja ketjukuvaukset näiden välisinä morfismeina.

Esimerkki 5.9. Renkaan R modulit ja näiden väliset lineaarikuvaukset muodostavat tavanomaisen yhdisteen kanssa kategorian R-**Mod**. Olkoon $\mathbb{Z}_{\geq}$ luonnollisten lukujen joukko käänteisesti järjestettynä. Tarkastellaan sitä kategorian $R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}_{\geq}}$ täyttä alikategoriaa C, johon kuuluvat täsmälleen ne objektit F, joilla $F(f \circ g) = 0$ kaikilla $f\colon n+1 \to n$ ja $g\colon n+2 \to n+1$, missä 0 on nollamorfismi $F(n+2) \to F(n)$.

Induktioperiaatteella voidaan havaita, että kaikilla $F \in C$, $n \in Z$, $k \geq 2$ ja $f\colon n+k \to n$ pätee, että $F(f) = 0$. Siis jos $F(f) \neq 0$, niin väistämättä joko $f = \mathrm{id}$ tai f on muotoa $n+1 \to n$ jollakin $n \in Z$. Siispä jokainen $F \in C$ voidaan samastaa parin $(M_\bullet, d_\bullet)$ kanssa, missä $M_\bullet$ on jono R-moduleja $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M_n = F(n)$ ja $d_\bullet$ on jono lineaarikuvauksia $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d_n = F(f_n)\colon M_n \to M_{n-1}$, missä f_n on yksikäsitteinen morfismi : $n \to n-1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Näille kuvauksille $d_\bullet$ pätee, että $d_n \circ d_{n+1} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Siis jokainen objekti $F \in C$ on ketjukompleksi. Toisaalta jos $(M_\bullet, d_\bullet)$ on ketjukompleksi, saadaan siitä objekti $F \in C$ asettamalla $F(n) = M_n$, $F(f_{n1}) = d_n$ ja $F(f_{nk}) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $k \geq 2$, missä f_{cd} on yksikäsitteinen morfismi $c \to c-d$. Siispä kategorian C objektit voidaan samastaa ketjukompleksien kanssa.

Kategorian C morfismit $F \to G$ ovat luonnollisia transformaatioita $F \Rightarrow G$. Koska $F(f) \neq 0$ vain, jos f on muotoa $n+1 \to n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$, ja nollamorfismin yhdiste minkä tahansa morfismin kanssa on nollamorfismi, niin luonnollisuusehto on tässä tapauksessa yhtäpitävä sen kanssa, että $\eta(n) \circ F(f_n) = G(f_n) \circ \eta(n+1)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, missä f_n on yksikäsitteinen morfismi $n+1 \to n$. Siispä kategorian C morfismit voidaan samastaa ketjukuvausten kanssa.

Sivuhuomautuksena todetaan vielä, että kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ tunnettu kuvaus ketjukomplekseista niiden k. homologiaryhmiin muodostaa funktorin $H_k\colon C \to R$-**Mod**.

Lause 5.12. *Kategorian D^C isomorfismit ovat täsmälleen luonnolliset isomorfismit muotoa $C \to D$ olevien funktorien välillä.*

Todistus. Olkoot $F, G \colon C \to D$ funktoreita ja $\eta \colon F \Rightarrow G$ luonnollinen transformaatio.

Oletetaan ensiksi, että η on luonnollinen isomorfismi. Käytetään merkintää $\eta^{-1}(c) = \big(\eta(c)\big)^{-1}$ kaikilla $c \in C$. Tällöin $\eta^{-1}(c)$ on muotoa $G(c) \to F(c)$ kaikilla $c \in C$ ja

$$\begin{aligned}\eta^{-1}(c_2) \circ G(f) &= \eta^{-1}(c_2) \circ G(f) \circ \eta(c_1) \circ \eta^{-1}(c_1)\\ &= \eta^{-1}(c_2) \circ \eta(c_2) \circ F(f) \circ \eta^{-1}(c_1)\\ &= F(f) \circ \eta^{-1}(c_1)\end{aligned}$$

kaikilla $c_1, c_2 \in C, f \colon c_1 \to c_2$. Siis η^{-1} on luonnollinen transformaatio $G \Rightarrow F$. Se on lisäksi luonnollisen transformaation η käänteismorfismi, joten η on isomorfismi kategoriassa D^C.

Oletetaan sitten, että η ei ole luonnollinen isomorfismi. Tällöin on olemassa $c \in C$, jolla $\eta(c)$ ei ole isomorfismi. Tällä morfismilla ei siis ole käänteismorfismia. Ei siis voi olla luonnollista transformaatioita $\eta^{-1} \colon G \Rightarrow F$, jolla $\eta(c) \circ \eta^{-1}(c) = \mathrm{id}$ ja $\eta^{-1}(c) \circ \eta(c) = \mathrm{id}$. Siis η ei ole isomorfismi kategoriassa D^C. □

Tästä lähtien jos merkitään $F \cong G$ funktoreille $F, G \colon C \to D$, tällä tarkoitetaan, että F ja G ovat isomorfisia kategoriassa D^C, toisin sanoen luonnollisesti isomorfisia.

Lause 5.13. *Olkoot C ja D kategorioita. Tällöin kaikilla objekteilla $c \in C$ kuvaus $-(c) \colon D^C \to D$, joka kuvaa funktorin F objektiksi $F(c)$ ja luonnollisen transformaation $\eta \colon F \Rightarrow G$ morfismiksi $\eta(c)$, on funktori.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan määritelmistä. □

Lause 5.14. *Olkoot C, D kategorioita. Olkoon $-(c)$ kuten edellisessä lauseessa. Tällöin on olemassa funktori $\$ \colon D^C \times C \to D$, jolle pätee, että $\$(G, -) = G$ ja $\$(-, c) = -(c)$ kaikilla $G \in D^C$ ja $c \in C$.*

Todistus. Luonnollisuusehdon nojalla

$$-(c')(\eta) \circ G(f) = \eta(c') \circ G(f) = G'(f) \circ \eta(c) = G'(f) \circ -(c)(\eta)$$

kaikilla $f \colon c \to c'$ ja $\eta \colon G \Rightarrow G'$. Siis lauseen 4.5 nojalla tämä funktori \$ on olemassa. □

Apulause 5.15. *Olkoot C, D, E kategorioita ja $F \colon C \times D \to E$ funktori. Tällöin kuvaus $G \colon C \to E^D$, $G(x) = F(x, -)$, on funktori. Vastaavasti tietysti $y \mapsto F(-, y)$ on funktori.*

Todistus. Tunnetusti $F(f, -)$ on muotoa $F(c_1, -) \Rightarrow F(c_2, -)$ kaikilla $f \colon c_1 \to c_2$. Olkoon $d \in D$ objekti. Tällöin selvästi $F(f, d) \circ F(g, d) = F(f \circ g, d)$, aina kun yhdiste $f \circ g$ on olemassa, ja $F(\mathrm{id}_c, d) = \mathrm{id}_{F(c,d)}$ kaikilla $c \in C$. Siis G on funktori. □

5.4 Luonnolliset transformaatiot ja hom-funktorit

Osa tutkielman myöhemmästä sisällöstä pohjautuu vahvasti hom-funktoreihin ja niiden välisiin luonnollisiin transformaatioihin, joten on hyödyllistä tarkastella näitä tarkemmin. Esitellään tähän liittyen eräs kategoriateorian keskeisistä lauseista, Yonedan lemma, sekä tämän seurauksia.

Jotta olisi selkeämpää, milloin on kyse kovariantista, kontravariantista tai kaksipaikkaisesta hom-funktorista ja mitkä muuttujat missäkin kontekstissa ovat vapaita ja mitkä sidottuja, käytetään tässä alaluvussa merkintöjä

$$\begin{aligned} h_{\downarrow} &\colon C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}, h_{\downarrow}(x) = h_x = \hom_C(-, x), \\ h^{\uparrow} &\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^{C}, h^{\uparrow}(x) = h^x = \hom_C(x, -), \text{ ja} \\ \mathrm{Nat} &= \hom_{\mathbf{Set}^C} \colon (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}} \times (\mathbf{Set}^C) \to \mathbf{Set}\,. \end{aligned}$$

Käytetään lisäksi merkintää $\$' \colon C \times \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$, $\$'(x, y) = \$(y, x)$, missä $\$$ on kuten lauseessa 5.14. Kuvausta $h_{\downarrow}$ voidaan kutsua *Yonedan upotukseksi* (ks. [48]). Tietysti myös $h^{\uparrow}$ on vastakkaisessa kategoriassa Yonedan upotus. Näissä merkinnöissä kategoria C voidaan korvata myös jollakin muulla kategorialla, kun se erikseen mainitaan esimerkiksi alaindeksissä. Esimerkiksi siis $\mathrm{Nat}_D = \hom_{\mathbf{Set}^D}$.

Apulause 5.16. *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria, $F \colon C \to \mathbf{Set}$ funktori ja $c \in C$ objekti. Olkoot $\eta, \varepsilon \colon h^c \Rightarrow F$ luonnollisia transformaatioita. Jos tällöin on voimassa $\eta(c)(\mathrm{id}_c) = \varepsilon(c)(\mathrm{id}_c)$, niin $\eta = \varepsilon$.*

Todistus (ks. [48]). Oletetaan, että $\eta(c)(\mathrm{id}_c) = \varepsilon(c)(\mathrm{id}_c)$. Kuvauksen η luonnollisuusehdon nojalla kaikilla morfismeilla $f \colon c \to c'$ pätee

$$\eta(c') \circ \hom(c, f) = F(f) \circ \eta(c).$$

Siis erityisesti

$$\begin{aligned} \eta(c')(f) &= \eta(c')(f \circ \mathrm{id}_c) \\ &= \big(\eta(c') \circ \hom(c, f)\big)(\mathrm{id}_c) \\ &= \big(F(f) \circ \eta(c)\big)(\mathrm{id}_c) \\ &= F(f)\big(\eta(c)(\mathrm{id}_c)\big) \end{aligned}$$

kaikilla $c' \in C$ ja $f \colon c \to c'$. Toisaalta myös kuvaukselle ε pätee vastaavasti $\varepsilon(c')(f) = F(f)\big(\varepsilon(c)(\mathrm{id}_c)\big)$. Siis

$$\eta(c')(f) = F(f)\big(\eta(c)(\mathrm{id}_c)\big) = F(f)\big(\varepsilon(c)(\mathrm{id}_c)\big) = \varepsilon(c')(f)$$

kaikilla $c' \in C$ ja $f \colon c \to c'$, ja siten $\eta(c') = \varepsilon(c')$ kaikilla $c' \in C$, ja edelleen $\varepsilon = \eta$. □

Apulause 5.17. *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria, $F \colon C \to \mathbf{Set}$ funktori ja $c \in C$ objekti. Olkoon $s \in F(c)$ alkio. Tällöin on olemassa luonnollinen transformaatio $\eta \colon h^c \Rightarrow F$, jolla $\eta(c)(\mathrm{id}_c) = s$.*

Todistus (ks. [48]). Määrätään kuvaukset $\eta(c')\colon \hom(c,c') \to F(c')$ kaikilla $c' \in C$ siten, että $\eta(c')(f) = F(f)(s)$. Tällöin kaikilla $f\colon c' \to c''$ ja $g\colon c \to c'$ pätee

$$\begin{aligned}\big(\eta(c'') \circ \hom(c,f)\big)(g) &= \eta(c'')(f \circ g)\\ &= F(f \circ g)(s)\\ &= F(f)\big(F(g)(s)\big)\\ &= F(f)\big(\eta(c')(g)\big)\\ &= \big(F(f) \circ \eta(c')\big)(g),\end{aligned}$$

joten kuvaukset $\eta(c)$ muodostavat luonnollisen transformaation $\eta\colon \hom(c,-) \Rightarrow F$. Lisäksi

$$\eta(c)(\mathrm{id}_c) = F(\mathrm{id}_c)(s) = s,$$

joten kuvauksella η on väitetyt ominaisuudet. $\square$

Apulause 5.18. *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria, $F\colon C \to \mathbf{Set}$ funktori ja $c \in C$ objekti. Tällöin kuvaus $\varepsilon(c,F)\colon \hom\big(h(c,-),F\big) \to F(c)$, $\varepsilon(c,F)(\eta) = \eta(c)(\mathrm{id}_c)$, on bijektio.*

Todistus. Kahden edellisen apulauseen nojalla $\varepsilon(c,F)$ on injektio ja surjektio. $\square$

Lause 5.19 (Yonedan lemma, kovariantti versio)**.** *Ytimekkäästi ilmaistuna kaikilla lokaalisti pienillä kategorioilla C on olemassa isomorfismi*

$$\hom\big(\hom(c,-),F\big) \cong F(c),$$

joka on luonnollinen objektin $c \in C$ ja funktorin $F\colon C \to \mathbf{Set}$ suhteen.

Jotta lauseen todistaminen ja käyttäminen olisi mahdollisimman selkeätä ja täsmällistä, muotoillaan tämä lauseen alkuosa vielä uudestaan käyttäen aiemmin mainittuja merkintöjä. Olkoon C lokaalisti pieni kategoria. Tällöin on olemassa luonnollinen isomorfismi $\mathrm{Nat} \circ \big((h^{\uparrow})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^C}\big) \Rightarrow \$'$.

Lisäksi erityisesti edellisen apulauseen kuvaukset $\varepsilon(c,F)$, $c \in C$, $F\colon C \to \mathbf{Set}$, muodostavat tällaisen luonnollisen isomorfismin.

Todistus (ks. [48]). Todistetaan, että kuvaukset $\varepsilon(c,F)$ muodostavat tällaisen luonnollisen isomorfismin. Edellisen apulauseen nojalla nämä kuvaukset ovat bijektioita.

Olkoot $c, c' \in C$ objekteja, $F, F'\colon C \to \mathbf{Set}$ funktoreita, $f\colon c \to c'$ morfismi ja

$\epsilon\colon F \to F'$ luonnollinen transformaatio. Tällöin kaikilla $\eta\colon h^{\uparrow}(c) \Rightarrow F$ pätee

$$\begin{aligned}
\Big(\varepsilon(c', F') \circ \mathrm{Nat}\left((h^{\uparrow})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^C}\right)(f, \epsilon)\Big)(\eta) &= \Big(\varepsilon(c', F') \circ \hom\big(h^{\uparrow}(f), \epsilon\big)\Big)(\eta) \\
&= \varepsilon(c', F')\big(\epsilon \circ \eta \circ h^{\uparrow}(f)\big) \\
&= \big(\epsilon \circ \eta \circ h^{\uparrow}(f)\big)(c')(\mathrm{id}_{c'}) \\
&= (\epsilon \circ \eta)(c')(\mathrm{id}_{c'} \circ f) \\
&= (\epsilon \circ \eta)(c')(f \circ \mathrm{id}_c) \\
&= \big(\epsilon(c') \circ \eta(c') \circ h^{\uparrow}(c)(f)\big)(\mathrm{id}_c) \\
&= \big(\epsilon(c') \circ F(f) \circ \eta(c)\big)(\mathrm{id}_c) \\
&= \big(\epsilon(c') \circ F(f)\big)\big(\eta(c)(\mathrm{id}_c)\big) \\
&= \big(\$'(c', \epsilon) \circ \$'(f, F)\big)\big(\eta(c)(\mathrm{id}_c)\big) \\
&= \$'(f, \epsilon)\big(\eta(c)(\mathrm{id}_c)\big) \\
&= \big(\$'(f, \epsilon) \circ \varepsilon(c, F)\big)(\eta),
\end{aligned}$$

joten ε on todella luonnollinen isomorfismi $\mathrm{Nat} \circ \left((h^{\uparrow})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^C}\right) \Rightarrow \$'$. $\square$

Seuraus 5.20 (Yonedan lemma, kontravariantti versio, ks. [48])**.** *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria. Soveltamalla Yonedan lemmaa vastakkaiseen kategoriaan C^{op} havaitaan, että tällöin on olemassa objektien $c \in C$ ja funktorien $F\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ suhteen luonnollinen isomorfismi*

$$\mathrm{Nat}_{C^{\mathrm{op}}}\left(\hom_C(-, c), F\right) = \mathrm{Nat}_{C^{\mathrm{op}}}\left(\hom_{C^{\mathrm{op}}}(c, -), F\right) \cong F(c),$$

eli aiemmilla merkinnöillä on olemassa luonnollinen isomorfismi

$$\mathrm{Nat}_{C^{\mathrm{op}}} \circ \left((h_{\downarrow})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}}\right) \cong \$'_{C^{\mathrm{op}}}.$$

Seuraus 5.21 (ks. [48])**.** *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria. Soveltamalla Yonedan lemmaa funktoreihin $F = h_{\downarrow}$ tai $F = h^{\uparrow}$ havaitaan, että tällöin on olemassa parametrien $c_1, c_2 \in C$ suhteen luonnolliset isomorfismit*

$$\mathrm{Nat}\left(\hom(c_1, -), \hom(c_2, -)\right) \cong \hom(c_2, c_1)$$

ja

$$\mathrm{Nat}_{C^{\mathrm{op}}}\left(\hom(-, c_1), \hom(-, c_2)\right) \cong \hom(c_1, c_2),$$

eli aiemmilla merkinnöillä on olemassa luonnollinen isomorfismi

$$\mathrm{Nat} \circ \left((h^{\uparrow})^{\mathrm{op}}, h^{\uparrow}\right) \cong \$' \circ (\mathrm{Id}_C, \hom^{\uparrow}) = \hom_{C^{\mathrm{op}}}$$

ja luonnollinen isomorfismi

$$\mathrm{Nat}_{C^{\mathrm{op}}} \circ \left((h_{\downarrow})^{\mathrm{op}}, h_{\downarrow}\right) \cong \$'_{C^{\mathrm{op}}} \circ (\mathrm{Id}_{C^{\mathrm{op}}}, \hom_{\downarrow}) = \hom_C.$$

Lause 5.22 (ks. [48])**.** *Pienen kategorian C Yonedan upotus $h_{\downarrow}\colon C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ on niin sanotusti täysin uskollinen funktori: kaikilla $c, c' \in C$ kuvauksen $h_{\downarrow}$ rajoittuma $h_{\downarrow}\restriction_{\hom_C(c,c')}$ on bijektio $\hom_C(c, c') \to \hom(h^c, h^{c'})$. Erityisesti tällaisen rajoittuman käänteiskuvaus on kuvaus $g\colon \hom(h^c, h^{c'}) \to \hom_C(c, c')$, $g(\eta) = \eta(c)(\mathrm{id}_c)$.*

Todistus. Olkoon $f\colon c \to c'$ morfismi. Koska

$$(g \circ h_\downarrow)(f) = h_f(c)(\mathrm{id}_c) = \hom(c, f)(\mathrm{id}_c) = f \circ \mathrm{id}_c = f$$

ja g on tunnetusti bijektio, niin myös $h_\downarrow\restriction_{\hom_C(c,c')} = g^{-1}$ on bijektio. □

Seuraus 5.23. *Jokainen luonnollinen transformaatio* $\hom(-, c) \Rightarrow \hom(-, c')$*, missä* $c, c' \in C$ *ja* C *on lokaalisti pieni kategoria, on funktori* $\hom(-, f)$ *jollakin* $f\colon c \to c'$.

Lause 5.24. *Olkoon* C *pieni kategoria ja* $h_\downarrow\colon C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ *Yonedan upotus. Tällöin* $h_\downarrow$ *niin sanotusti heijastaa isomorfismit: jos* $f\colon c \to c'$ *on morfismi ja* $h_\downarrow(f)$ *on isomorfismi, niin myös* f *on isomorfismi.*

Todistus. Oletetaan, että $h_\downarrow(f)$ on isomorfismi. On siis olemassa sellainen morfismi $g'\colon \hom(c', -) \Rightarrow \hom(c, -)$, jolla $h_\downarrow(f) \circ g' = \mathrm{id}$ ja $g' \circ h_\downarrow(f) = \mathrm{id}$. Koska $h_\downarrow$ on täysin uskollinen funktori, niin on olemassa yksikäsitteinen $f'\colon c' \to c$, jolla $h_\downarrow(f') = g'$. Lisäksi samasta syystä $h_\downarrow$ kuvaa ainoastaan identtiset morfismit identtisiksi morfismeiksi. Siispä koska $h_\downarrow(f \circ f') = h_\downarrow(f) \circ h_\downarrow(f') = \mathrm{id}$, niin $f \circ f' = \mathrm{id}$. Vastaavasti $f' \circ f = \mathrm{id}$. Siis f on isomorfismi. □

Apulause 5.25. *Olkoot* C *ja* D *lokaalisti pieniä kategorioita. Olkoot* $F_1, F_2\colon C \to D$ *funktoreita. Olkoon* $\epsilon\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}}}}$ *sellainen kuvaus, että* $\epsilon(c)$ *on muotoa* $\hom(-, F_1(c)) \Rightarrow \hom(-, F_2(c))$ *kaikilla* $c \in C$*. Olkoon kaikilla* $c \in C$ *morfismi* $\eta(c)$ *se yksikäsitteinen morfismi* $F_1(c) \to F_2(c)$*, jolla* $\hom(-, \eta(c)) = \epsilon(c)$*. Tällöin* ϵ *on luonnollinen transformaatio* $h_\downarrow \circ F_1 \Rightarrow h_\downarrow \circ F_2$*, missä* $h_\downarrow$ *on Yonedan upotus kategoriassa* D*, jos ja vain jos* η *on luonnollinen transformaatio* $F_1 \Rightarrow F_2$*. Edelleen* ϵ *on luonnollinen isomorfismi, jos ja vain jos myös* η *on.*

Todistus. Oletetaan, että η on luonnollinen transformaatio $F_1 \Rightarrow F_2$. Tällöin $\epsilon = h_\downarrow * \eta$ on tunnetusti luonnollinen transformaatio $h_\downarrow \circ F_1 \Rightarrow h_\downarrow \circ F_2$.

Oletetaan sitten, että ϵ on luonnollinen transformaatio $h_\downarrow \circ F_1 \Rightarrow h_\downarrow \circ F_2$. Olkoot $c, c' \in C$ objekteja ja $f\colon c \to c'$ morfismi. Tällöin

$$\begin{aligned}
\eta(c') \circ F_1(f) &= \hom\big(-, \eta(c')\big)\big(F_1(c)\big)\big(F_1(f)\big) \\
&= \epsilon(c')\big(F_1(c)\big)\big(F_1(f)\big) \\
&= \Big(\epsilon(c')\big(F_1(c)\big) \circ \hom\big(F_1(c), F_1(f)\big)\Big)(\mathrm{id}_{F_1(c)}) \\
&= \Big(\epsilon(c') \circ \hom\big(-, F_1(f)\big)\Big)\big(F_1(c)\big)(\mathrm{id}_{F_1(c)}) \\
&= \Big(\hom\big(-, F_2(f)\big) \circ \epsilon(c)\Big)\big(F_1(c)\big)(\mathrm{id}_{F_1(c)}) \\
&= \Big(\hom\big(F_1(c), F_2(f)\big) \circ \epsilon(c)\big(F_1(c)\big)\Big)(\mathrm{id}_{F_1(c)}) \\
&= \hom\big(F_1(c), F_2(f)\big)\Big(\hom\big(F_1(c), \eta(c)\big)(\mathrm{id}_{F_1(c)})\Big) \\
&= \hom\big(F_1(c), F_2(f)\big)\big(\eta(c)\big) \\
&= F_2(f) \circ \eta(c),
\end{aligned}$$

joten η on luonnollinen transformaatio $F_1 \Rightarrow F_2$.

Jos η on isomorfismi, niin myös $\epsilon = h_\downarrow * \eta$ on. Jos taas ϵ on isomorfismi, niin koska Yonedan upotus heijastaa isomorfismit, on jokaisen komponentin $\eta(c)$ oltava isomorfismi, ja edelleen η on luonnollinen isomorfismi. □

Seuraus 5.26. *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita. Olkoot $F_1, F_2 \colon C \to D$ funktoreita. Tällöin $F_1 \cong F_2$, jos ja vain jos $h_\downarrow \circ F_1 \cong h_\downarrow \circ F_2$, missä $h_\downarrow$ on Yonedan upotus kategoriassa D.*

5.5 Kategorioiden ekvivalenssi

Kategorioiden ekvivalenssi on kahden kategorian välinen ominaisuus, joka tekee niistä ”oleellisesti saman” kategorian kategoriateorian näkökulmasta. Kategorioiden isomorfisuuttakin voisi luonnehtia samalla tavoin. Isomorfisuus on kuitenkin kategoriateorian näkökulmasta usein turhan vahva ominaisuus. Ekvivalenssi on isomorfisuutta heikompi ominaisuus, mikä pian havaitaan, mutta kuitenkin tarpeeksi vahva kategoriateorialle. Esitetään ekvivalenssin määritelmä ja tarkastellaan lyhyesti sen ominaisuuksia. (Ks. [63])

Määritelmä 5.8 (ks. [21])**.** Olkoot C ja D kategorioita. Jos on olemassa funktorit $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ siten, että $G \circ F \cong \mathrm{Id}_C$ ja $F \circ G \cong \mathrm{Id}_D$, niin kategoriat C ja D ovat *ekvivalentteja* ja nämä funktorit ovat *ekvivalensseja*. Käytetään tässä tutkielmassa merkintää $C \simeq D$ tarkoittamaan, että C ja D ovat ekvivalentteja.

Lause 5.27. *Selvästi kategorioiden isomorfisuus on ekvivalenssin erikoistapaus.*

Esimerkki 5.10. Olkoon C jonkin epätyhjän joukon täysi relaatio. Olkoon $F\colon \mathbf{1} \to C$ jokin funktori ja G yksikäsitteinen funktori $C \to \mathbf{1}$. Koska C on täysi relaatio, on olemassa yksikäsitteinen luonnollinen transformaatio $\eta\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_C$, joka on lisäksi luonnollinen isomorfismi. Lisäksi $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$. Siis $C \simeq \mathbf{1}$.

Lause 5.28. *Kategorioiden ekvivalenssi on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen ominaisuus. Lisäksi jos $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ ovat ekvivalensseja, kuten myös $F'\colon D \to E$ ja $G'\colon E \to D$, niin $F' \circ F$ ja $G \circ G'$ ovat ekvivalensseja.*

Todistus. Koska $F' \circ F \circ G \circ G' \cong F' \circ G' \cong \mathrm{Id}_E$ ja $G \circ G' \circ F' \circ F \cong G \circ F \cong \mathrm{Id}_C$, niin $F' \circ F$ ja $G \circ G'$ ovat ekvivalenssifunktoreita.

Selvästi Id_C on ekvivalenssi millä tahansa kategorialla C. Symmetrisyys seuraa suoraan määritelmästä, ja transitiivisuus juuri todistetusta lauseen loppuosasta. □

Määritelmä 5.9 (ks. [1, s. 51])**.** Olkoon C kategoria ja C' tämän sellainen täysi alikategoria, että kaikille $c \in C$ on olemassa yksikäsitteinen $c' \in C'$, jolla $c \cong c'$ kategoriassa C. Tällöin C' on kategorian C *luuranko*.

Huomautus. Riippuu käytetyistä aksioomista, onko kaikilla kategorioilla luuranko. Pienillä kategorioilla luurangon olemassaolo seuraa tavanomaisesta valinta-aksioomasta.

Esimerkki 5.11. Olkoon C jokin täysi, epätyhjä relaatio. Tällöin mikä tahansa kategorian C alikategoria, jossa on tasan yksi objekti, on kategorian C luuranko.

Esimerkki 5.12 (ks. [1, s. 51])**.** Kardinaalilukujen luokka ja näiden väliset funktiot ovat kategorian **Set** luuranko.

Lause 5.29 (ks. [1, s. 51])**.** *Jokainen kategoria, jolla on luuranko, on ekvivalentti luurankonsa kanssa.*

Todistus. Olkoon C kategoria, C' sen luuranko ja $F\colon C' \to C$ kanoninen upotus. Määritetään funktori $G\colon C \to C'$ siten, että kaikilla $c \in C$ on $G(c)$ se yksikäsitteinen $c' \in C'$, jolla $c \cong c'$. Valitaan jokaiselle $c \in C$ jokin isomorfismi $\eta(c)\colon c \to F\big(G(c)\big)$; yksinkertaisuuden vuoksi valitaan $\eta(c') = \mathrm{id}_{c'}$ kaikilla $c' \in C'$. Määritetään nyt, että kaikilla $f\colon c_1 \to c_2$ on $G(f) = \eta(c_2) \circ f \circ \big(\eta(c_1)\big)^{-1}$. On helppo havaita, että tällöin G on funktori. Lisäksi $\eta(c_2) \circ f = \eta(c_2) \circ f \circ \eta(c_1)^{-1} \circ \eta(c_1) = G(f) \circ \eta(c_1)$ kaikilla $f\colon c_1 \to c_2$, joten η on luonnollinen isomorfismi $\mathrm{Id}_C \Rightarrow F \circ G$. Toisaalta myös $\mathrm{Id}_{C'} \cong G \circ F$, sillä G konstruoitiin siten, että $G \circ F = \mathrm{Id}_{C'}$. Täten C ja C' ovat ekvivalentteja. $\square$

Lause 5.30 (ks. [1, s. 51])**.** *Olkoon C kategoria ja C' sen luuranko. Olkoon D kategoria ja D' sen luuranko. Tällöin C' ja D' ovat isomorfisia, jos ja vain jos C ja D ovat ekvivalentteja.*

Todistus. ($\Rightarrow$) Oletetaan, että C' ja D' ovat isomorfisia. Tällöin $C \simeq C' \cong D' \simeq D$, joten $C \simeq D$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että C ja D ovat ekvivalentteja. Tällöin C' ja D' ovat ekvivalentteja, sillä $C' \simeq C \simeq D \simeq D'$. On siis olemassa funktorit $F\colon C' \to D'$ ja $G\colon D' \to C'$ ja luonnolliset isomorfiat $\eta\colon \mathrm{Id}_{D'} \Rightarrow F \circ G$ ja $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{C'} \Rightarrow G \circ F$. Koska nämä luonnolliset isomorfiat ovat olemassa ja C' ja D' ovat luurankoja, pätee näille funktoreille $F\big(G(d')\big) = d'$ ja $G\big(F(c')\big) = c'$.

Määritellään nyt funktori $F'\colon C' \to D'$ siten, että $F'(c') = F(c')$ ja

$$F'(f) = \eta^{-1}\big(F(c_2')\big) \circ F(f) \circ \eta\big(F(c_1')\big)$$

kaikilla $c' \in C'$ ja $f'\colon c_1' \to c_2'$. On helppo havaita, että kyseessä todella on funktori. Lisäksi

$$\begin{aligned}
F'\big(G(g)\big) &= \eta^{-1}\Big(F\big(G(d_2')\big)\Big) \circ F\big(G(g)\big) \circ \eta\Big(F\big(G(d_1')\big)\Big) \\
&= \eta^{-1}(d_2') \circ F\big(G(g)\big) \circ \eta(d_1') \\
&= \eta^{-1}(d_2') \circ \eta(d_2') \circ g \\
&= g
\end{aligned}$$

kaikilla $g\colon d_1' \to d_2'$. Siis $F' \circ G = \mathrm{Id}_{D'}$.

Määritellään toisaalta funktori $F''\colon C' \to D'$ siten, että $F''(c') = F(c')$ ja

$$F''(f) = F\big(\varepsilon^{-1}(c_2') \circ f \circ \varepsilon(c_1')\big)$$

kaikilla $c' \in C$ ja $f\colon c'_1 \to c'_2$. Tämäkin on selvästi funktori, ja apulauseen 5.9 nojalla

$$\begin{aligned} G\big(F''(f)\big) &= G\Big(F\big(\varepsilon^{-1}(c'_2) \circ f \circ \varepsilon(c'_1)\big)\Big) \\ &= \varepsilon^{-1}(c'_2) \circ G\big(F(f)\big) \circ \varepsilon(c'_1) \\ &= \varepsilon^{-1}(c'_2) \circ \varepsilon(c'_2) \circ f \\ &= f \end{aligned}$$

kaikilla $f\colon c'_1 \to c'_2$. Siis $G \circ F'' = \mathrm{Id}_{C'}$.

Nyt $F' = F' \circ G \circ F'' = F''$, joten myös $G \circ F' = \mathrm{Id}_{C'}$. Siis F' ja G ovat isomorfismeja ja $C' \cong D'$. □

Isomorfisia ryhmiä ym. struktuureja voidaan kuvailla ”alkioiden nimeämistä vaille samoiksi”. Vastaava pätee kategorioille. Edellinen lause tarjoaa intuitiivisen näkökulman myös kategorioiden ekvivalenssille: ekvivalentit kategoriat ovat ”keskenään isomorfisten objektien määrää vaille isomorfisia” kategorioita. Ekvivalenssifunktoreiden taas voidaan ajatella olevan ”luonnollista isomorfiaa vaille toistensa käänteisfunktioita” (ks. [63]).

6 Rajat ja korajat

Tässä luvussa esitellään universaalimorfismien, rajojen ja korajojen sekä tulojen ja kotulojen käsitteet. Pääpaino on rajoilla ja korajoilla; ne määritellään universaalimorfismien avulla, ja tulot ja kotulot ovat niiden erikoistapauksia.

Monet muiden matematiikan alojen määritelmät ovat näiden käsitteiden erikoistapauksia, ja lukija todennäköisesti jo tunteekin joitakin tällaisia määritelmiä. Näiden käsitteiden tunteminen on siksi yleisesti hyödyksi. Toisaalta niillä tullaan myöhemmin myös valaisemaan joitakin liittofunktorien ominaisuuksia.

6.1 Määritelmiä

Määritellään luvun alussa mainitut käsitteet ja tarkastellaan esimerkkejä niistä. Esitetään myös yksi universaalimorfismien (ja siten myös rajojen, korajojen, tulojen ja kotulojen) merkittävä ominaisuus: se, että ne ovat niin sanotusti yksikäsitteistä isomorfismia vaille yksikäsitteisiä.

Määritelmä 6.1 (ks. [7, s. 55])**.** Olkoon $F\colon J \to C$ funktori ja $c \in C$ objekti. Olkoon $r \in J$ objekti ja $u\colon c \to F(r)$ morfismi. Tällöin pari (r, u) on *universaalimorfismi objektista c funktoriin F*, jos kaikilla objekteilla $j \in J$ ja morfismeilla $f\colon c \to F(j)$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $f'\colon r \to j$, jolla $F(f') \circ u = f$, eli kaavio

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(r) \arrow[d, dashed, "F(!)"] \\ & F(j) \end{tikzcd}$$

kommutoi millä tahansa $f\colon c \to F(j)$.

Tämän duaalikäsite on *universaalimorfismi funktorista F objektiin c* (ks. [7, s. 58]). Universaalimorfismille (r, u) funktorista F objektiin c pätee siis, että kaikilla objekteilla $j \in J$ ja morfismeilla $f\colon F(j) \to c$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $f'\colon j \to r$, jolla $u \circ F(f') = f$. Jos edellä esitetystä kaaviosta jokaisen nuolen suunta vaihdetaan, saadaan tällaista universaalimorfismia kuvaava kommutoiva kaavio.

Pari (r, u) on siis universaalimorfismi objektista c funktoriin F, jos ja vain jos se on universaalimorfismi funktorista F^{op} objektiin c.

Esimerkki 6.1. Olkoon C ryhmä ja c tämän ainoa objekti. Tällöin mikä tahansa pari (c, u), $u \in C$, on universaalimorfismi objektista c funktoriin Id. Tämä johtuu siitä, että kaikilla $f \in C$ on yksikäsitteinen $f' \in C$, jolla $\mathrm{Id}(f') \circ u = f$, nimittäin $f' = f \circ u^{-1}$.

Esimerkki 6.2. Olkoon V vektoriavaruus ja B sen kanta. Olkoon $F\colon K\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ unohdusfunktori. Olkoon $u\colon B \to F(V)$ kannan upotus. Olkoon W vektoriavaruus ja $f\colon B \to F(W)$ kuvaus. Tunnetusti on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $f'\colon V \to W$, jolla $f'(b) = f(b)$ jokaisella $b \in B$. Siis (V, u) on universaalimorfismi objektista B funktoriin F.

Esimerkki 6.3. Olkoot S ja T esijärjestettyjä joukkoja ja $F: S \to T$ funktori. Olkoot $s \in S$ ja $t \in T$ joitakin alkioita. Oletetaan, että on olemassa $u \in T$ siten, että (s, u) on universaalimorfismi objektista t funktoriin F. Tällöin (ja vain tällöin) pätee, että s on sellainen alkio, jolla $t \leq F(s)$, ja $s \leq s'$ aina, kun $t \leq F(s')$.

Esimerkki 6.4. Tarkennetaan edellä esitettyä esimerkkiä esijärjestyksistä. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Esijärjestetään joukot τ ja $\mathcal{P}(X)$ sisältyvyyden suhteen. Olkoon $F: \tau \to \mathcal{P}(X)$ avoimien joukkojen upotus. Tällöin kaikille $U \in \mathcal{P}(X)$ on yksikäsitteiset $U' \in \tau$ ja $u: F(U') \to U$ siten, että (U', u) on universaalimorfismi funktorista F objektiin u. Sisäpisteiden joukko $\operatorname{int}(U)$ on nimittäin suurin avoin joukko, joka sisältyy joukkoon U, joten $\big(\operatorname{int}(U), u\big)$, missä $u: F\big(\operatorname{int}(U)\big) \to U$ on yksikäsitteinen, on tämä universaalimorfismi.

Universaalimorfismin (r, u) objektista $c \in C$ funktoriin $F: J \to C$, jos se on olemassa, voi usein ajatella olevan optimaalisin ratkaisu tietylle objektin c ja funktorin F avulla ilmaistulle ongelmalle (ks. [72]) tai paras approksimaatio objektille c kategoriassa J funktorin F suhteen (vrt. [54]). Jälkimmäistä näkökulmaa valaisevat erityisesti esijärjestyksiä koskeneet esimerkit – esimerkiksi joukon U sisäpisteiden joukko on intuitiivisesti ajatellen joukon U paras avoin approksimaatio.

Myös unohdusfunktoria $F: K\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ koskevassa esimerkissä on kyse tietynlaisesta approksimaatiosta. Jos nimittäin (V, u) on universaalimorfismi joukosta B funktoriin F, jokaisella kuvauksella $f: B \to F(W)$ tulee olla lineaarikuvaus $f': V \to W$, jolla $F(f') \circ u = f$. Tämä asettaa alarajan vektoriavaruuden V dimensiolle, sillä jos f on injektio ja $f[B]$ lineaarisesti riippumaton joukko, täytyy vektoriavaruuden V olla dimensioltaan vähintään $|f[B]| = |B|$. Toisaalta tämän lineaarikuvauksen f' tulee olla lisäksi yksikäsitteinen. Tämä taas asettaa ylärajan avaruuden B dimensiolle, sillä jos $\dim(V) > |B|$, niin lineaarikuvaus f' voidaan valita usealla tavalla. Vektoriavaruus V on siis ”tarpeeksi suuri”, jotta joukon B voi upottaa siihen lineaarialgebran kannalta mielekkäällä tavalla, mutta ei kuitenkaan ”tarpeettoman suuri”. Tässä suhteessa avaruuden V voi ajatella olevan myös optimaalinen ratkaisu.

Kun käsitellään esijärjestyksiä, kategoriaa **Set** tai kategoriaa K-**Vect**, on helppo puhua jonkin objektin ”suuruudesta”. Kategorian määritelmä on kuitenkin hyvin yleisluontoinen, eikä ”suuruudella” tai ”pienuudella” ole tällaista selvää intuitiivista merkitystä kaikissa kategorioissa (ks. [53]). Voi siksi olla joskus hankala hahmottaa, millaisesta approksimaatiosta tai millaisesta ongelmasta ja optimaalisuudesta milloinkin on intuitiivisesti ajatellen kyse. Koska liittofunktorit liittyvät läheisesti universaalimorfismeihin, voi myös liittofunktorien tarkastelu luvussa 8 helpottaa universaalimorfismien ymmärtämistä.

Lause 6.1. *Olkoon (r, u) universaalimorfismi objektista c funktoriin $F: J \to C$. Tällöin (r', u') on myös tällainen universaalimorfismi, jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $f: r' \to r$, jolla $u = F(f) \circ u'$.*

Todistus. Ensiksi havaitaan, että jos $f: r \to r$ on morfismi ja $u = F(f) \circ u$, niin universaalimorfismin määritelmän nojalla $f = \mathrm{id}$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että (r', u') on mainitunlainen universaalimorfismi. Universaalimorfismin määritelmän nojalla tällöin on olemassa yksikäsitteiset $f\colon r' \to r$ ja $f'\colon r \to r'$, joilla $u = F(f) \circ u'$ ja $u' = F(f') \circ u$. Tällöin

$$u = F(f) \circ F(f') \circ u = F(f \circ f') \circ u,$$

joten $f \circ f' = \mathrm{id}$. Vastaavasti $f' \circ f = \mathrm{id}$. Siis f on isomorfismi.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $f\colon r' \to r$, jolla pätee $u = F(f) \circ u'$. Olkoon $g\colon c \to F(j)$ jollakin $j \in J$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $h\colon r \to j$, jolla $g = F(h) \circ u$. Osoitetaan, että on olemassa yksikäsitteinen $h'\colon r' \to j$, jolla $g = F(h') \circ u'$, ja että tämän arvo on $h' = h \circ f$.

Ensiksi $h \circ f$ toteuttaa edellä mainitun ehdon, sillä

$$F(h \circ f) \circ u' = F(h) \circ F(f) \circ u' = F(h) \circ u = g.$$

Oletetaan sitten, että on myös toinen morfismi $\hat{h}\colon r' \to j$, $\hat{h} \neq h \circ f$, joka toteuttaa saman ehdon. Tällöin koska f^{-1} on isomorfismina epimorfismi, niin on voimassa $\hat{h} \circ f^{-1} \neq h \circ f \circ f^{-1} = h$, mutta

$$g = F(\hat{h}) \circ u' = F(\hat{h}) \circ F(f^{-1}) \circ u = F(\hat{h} \circ f^{-1}) \circ u.$$

Tämä on ristiriita, sillä morfismi h oli se yksikäsitteinen morfismi, jolla $F(h) \circ u = g$. Siis (r', u') on universaalimorfismi. □

Lause 6.2. *Olkoon (r, u) universaalimorfismi objektista c funktoriin $F\colon J \to C$ ja $f\colon r \to r'$ isomorfismi. Tällöin $(r', F(f) \circ u)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin F.*

Todistus. Universaalisuuden nojalla $F(g) \circ F(f) \circ u = u$, jos ja vain jos $g = f^{-1}$. Siis lauseen 6.1 nojalla väite pätee. □

Universaalimorfismi objektista c funktoriin F ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Esimerkiksi vektoriavaruudella on yleensä useita eri kantoja. Havaittiin kuitenkin, että universaalimorfismi on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen ja että tämä isomorfismi voidaan aina valita edellä esitellyllä yksikäsitteisellä tavalla. Tämän vuoksi universaalimorfismeja voidaan usein käsitellä ikään kuin ne olisivat yksikäsitteisiä.

Määritelmä 6.2 (ks. [7, s. 67])**.** Olkoot C ja J kategorioita. Määritellään *diagonaalifunktori* $\Delta\colon C \to C^J$ siten, että se kuvaa jokaisen

- objektin c vakiofunktoriksi $\Delta_c\colon J \to C$ ja
- morfismin $f\colon c \to c'$ siksi luonnolliseksi transformaatioksi $\Delta_c \Rightarrow \Delta_{c'}$, jonka jokainen komponentti on f.

Selkeyden vuoksi tässä tutkielmassa voidaan käyttää myös merkintää $\Delta_C^J = \Delta$ täsmentämään diagonaalifunktorin lähtö- ja maalikategorioita.

Lause 6.3. *Diagonaalifunktori* $\Delta\colon C \to C^J$ *on funktori. Diagonaalifunktoreille pätevät* $\Delta(c) \circ G = \Delta(c)$ *ja* $\Delta(f) * G = \Delta(f)$ *kaikilla* $c, f \in C$ *ja* $G\colon J' \Rightarrow J$*. Lisäksi* $(\Delta^J_{C'} \circ F)(c) = F \circ \Delta^J_C(c)$ *kaikilla* $F\colon C \to C'$ *ja* $c \in C$*.*

Todistus. Diagonaalifunktorin määritelmän mukaan $\Delta(f)$ on muotoa $\Delta(c) \to \Delta(c')$ kaikilla $c, c' \in C$ ja $f\colon c \to c'$. Selvästi Δ kuvaa identtisen morfismin identtiseksi luonnolliseksi transformaatioksi ja morfismin $f \circ g$ luonnolliseksi transformaatioksi $\Delta(f) \circ \Delta(g)$. Siis diagonaalifunktori on funktori.

Yhtäsuuruudet $\Delta(c) \circ G = \Delta(c)$ ja $\Delta(f) * G = \Delta(f)$ seuraavat siitä, että $\Delta(c)$ ja $\Delta(f)$ ovat vakiokuvauksia kaikilla $c, c' \in C$ ja $f\colon c \to c'$.

Olkoon lopuksi $F\colon C \to C'$ funktori. Koska funktori Δ_c kuvaa kaikki objektit samaksi objektiksi c ja kaikki morfismit samaksi morfismiksi id_c kaikilla $c \in C$, niin $F \circ \Delta_c = \Delta_{F(c)}$. Tämän seurauksena

$$(\Delta^J_{C'} \circ F)(c) = \Delta^J_{C'}\big(F(c)\big) = \Delta_{F(c)} = F \circ \Delta_c = F \circ \Delta^J_C(c)$$

kaikilla $c \in C$. □

Huomautus. Aiemminkin esitettiin määritelmä diagonaalifunktorille, joka silloin oli muotoa $C \to C \times C$. Tätä aikaisempaa diagonaalifunktoria voi pitää tämän uuden määritelmän erikoistapauksena, sillä jos J on kahden objektin diskreetti kategoria, $F\colon C \times C \to C^J$ on esimerkissä 5.8 mainittu isomorfismi ja Diag aiemmin määritelty diagonaalifunktori, niin $F \circ \mathrm{Diag} = \Delta$.

Määritelmä 6.3 (ks. [7, s. 67])**.** Olkoot C ja J kategorioita. Tällöin universaalimorfismi objektista $F \in C^J$ funktoriin $\Delta\colon C \to C^J$ on funktorin F *koraja*. Korajaan (r, u) kuuluvalle objektille $r \in C$ voidaan käyttää merkintää $\mathrm{colim}(F)$, ja myös tätä pelkkää objektia voidaan toisinaan kutsua korajaksi. Jos J on suuri, niin myös korajaa $\mathrm{colim}(F)$ voi kutsua suureksi. Vastaavasti voidaan puhua pienistä ja äärellisistä korajoista.

Morfismit $F \to \Delta(c)$, missä $c \in C$, ovat luonnollisia transformaatioita. Olkoon η tällainen. Tällöin kaikilla morfismeilla $f\colon j_1 \to j_2$ kategoriassa J pätee, että

$$\eta(j_2) \circ F(f) = \Delta(c)(f) \circ \eta(j_1),$$

eli

$$\eta(j_2) \circ F(f) = \eta(j_1).$$

Jos nyt (c, η) on universaalimorfismi objektista F funktoriin Δ, niin kaikille (c', η'), missä η' on luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow \Delta(c')$, pätee, että on yksikäsitteinen $f\colon c \to c'$, jolla $\eta' = \Delta(f) \circ \eta$, eli kaikilla $j \in J$ pätee $\eta'(j) = f \circ \eta(j)$.

Esimerkki 6.5. Olkoon C kategoria. Milloin koraja funktorille $F\colon \mathbf{0} \to C$ on olemassa, ja millainen se on? Triviaalisti kaikille $c \in C$ on olemassa luonnollinen transformaatio $F \Rightarrow \Delta(c)$, nimittäin tyhjä kuvaus. Triviaalisti myös mille tahansa morfismille $f \in C$ pätee, että $\Delta(f) \circ \emptyset = \emptyset$, missä $\emptyset$ ovat tyhjiä luonnollisia transformaatioita. Siispä funktorin F koraja on tyhjällä luonnollisella transformaatiolla varustettu objekti c, jolle pätee, että kaikille $d \in C$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $c \to d$. Funktorin F koraja on siis alkuobjekti kategoriassa C, jos tämä on olemassa; muutoin korajaa ei ole olemassa.

Esimerkki 6.6. Olkoon C kategoria. Tällöin mielivaltaisen funktorin $F\colon \mathbf{1} \to C$ koraja on $\big(F(0), j \mapsto \mathrm{id}_{F(0)}\big)$, sillä jos $\eta\colon F \Rightarrow \Delta(c)$ on luonnollinen transformaatio, niin on olemassa yksikäsitteinen $f\colon F(0) \to c$, jolla $\eta(0) = f \circ \mathrm{id}_{F(0)}$, nimittäin $f = \eta(0)$.

Esimerkki 6.7. Olkoon C esijärjestys ja $J \neq \mathbf{0}$. Tällöin funktorin F korajan määritelmä on ekvivalentti objektien $F(j)$, $j \in J$, pienimmän ylärajan määritelmän kanssa.

Korajat käynevät kommutatiivisten kaavioiden kautta entistä selvemmäksi. Esimerkiksi jos J on kahden objektin j_1 ja j_2 diskreetti kategoria, $F\colon J \to C$ funktori, $c \in C$ objekti ja $\eta\colon F \Rightarrow \Delta(c)$ luonnollinen transformaatio, niin näistä voidaan esittää seuraava (triviaalisti kommutoiva) kaavio.

$$F(j_1) \xrightarrow{\eta(j_1)} \Delta(c)(j_1) = c = \Delta(c)(j_2) \xleftarrow{\eta(j_2)} F(j_2)$$

Jos lisäksi (c, η) on funktorin koraja, niin kaavion

$$\begin{tikzcd}
F(j_1) \arrow[rr, "\eta(j_1)"] \arrow[drr, "\varepsilon(j_1)"'] & & c \arrow[d, dashed, "!"] & & F(j_2) \arrow[ll, "\eta(j_2)"'] \arrow[dll, "\varepsilon(j_2)"] \\
& & \Delta(d)(j_1) = d = \Delta(d)(j_2) & &
\end{tikzcd}$$

on kommutoitava kaikilla objekteilla $d \in C$ ja kaikilla luonnollisilla transformaatioilla $\varepsilon\colon F \Rightarrow \Delta(d)$.

Edellä kuvailtua korajaa voidaan kutsua myös kahden objektin kotuloksi. Kotulot ovat erityisen intuitiivinen ja yleisesti käytetty korajojen erikoistapaus. Esitetään seuraavaksi kotulon yleinen määritelmä.

Määritelmä 6.4 (ks. [16])**.** Olkoon C kategoria ja J diskreetti kategoria. Tällöin funktorin $F\colon J \to C$ koraja, jos se on olemassa, on objektien $F(j)$, $j \in J$, *kotulo* ja tähän korajaan liitetyn luonnollisen transformaation $\iota\colon F \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} F)$ komponentit ovat *koprojektioita*. Myös pelkkää korajaobjektia $\operatorname{colim} F$ voidaan kutsua kotuloksi. Kuten korajoja, myös kotuloja voidaan kutsua kategoriasta J riippuen äärellisiksi, pieniksi tai suuriksi.

Esimerkki 6.8 (ks. [7, s. 63])**.** Tarkastellaan pieniä kotuloja joukkojen kategoriassa. Olkoon J pieni, diskreetti kategoria ja $F\colon J \to \mathbf{Set}$ funktori. Todistetaan, että seuraava väite pitää paikkansa: funktorin F koraja on olemassa, ja se on joukkojen $F(j)$, $j \in J$, erillinen yhdiste (ks. [16]) varustettuna luonnollisella transformaatiolla, joka muodostuu kanonisista injektioista $\iota_j\colon F(j) \to \bigsqcup_{j\in J} F(j)$.

Olkoon S joukko ja $\varepsilon\colon F \Rightarrow \Delta(S)$ luonnollinen transformaatio. Määritetään kuvaus $f\colon \bigsqcup_{j\in J} F(j) \to S$ seuraavasti. Jokainen $x \in \bigsqcup_{j\in J} F(j)$ kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon $\mathrm{ran}(\iota_j)$; annetaan funktion f arvoksi tässä pisteessä $\big(\varepsilon(j) \circ \iota_j^{-1}\big)(x)$. Tällöin $\varepsilon(j) = f \circ \iota_j$ kaikilla objekteilla $j \in J$, eli $\varepsilon = \Delta(f) \circ \iota$.

Jos taas $g\colon \bigsqcup_{j\in J} F(j) \to S$ on eri funktio, on olemassa $j \in J$ ja $x \in F(j)$, jolla $g\big(\iota_j(x)\big) \neq f\big(\iota_j(x)\big)$. Siis $g \circ \iota_j \neq \varepsilon(j)$, joten $\varepsilon \neq \Delta(g) \circ \iota$. Siispä ehto $\varepsilon = \Delta(f) \circ \iota$ määrää kuvauksen f yksikäsitteisesti; siispä $\bigsqcup_{j\in J} F(j)$ on objektien $F(j)$, $j \in J$, kotulo.

Edellisessä esimerkissä on perusteltua sanoa, että mainittu koraja on erillinen yhdiste varustettuna kanonisilla injektioilla – vaikka useimmiten on olemassa myös muita kotuloja, niin nämä muut kotulot ovat väistämättä yksikäsitteistä isomorfiaa vaille sama kotulo kuin esitetty. Tämä on hyvä pitää mielessä myös tulevien esimerkkien kohdalla.

Esimerkki 6.9 (ks. [7, s. 63])**.** Pienet kotulot kategoriassa R-**Mod** ovat suoria summia varustettuna koprojektioilla, jotka ovat kanonisia injektioita, mikä havaitaan seuraavasti.

Olkoon J pieni, diskreetti kategoria ja $F\colon J \to R$-**Mod** jokin funktori. Olkoon $S = \bigoplus_{j\in J} F(j)$ suora summa ja $\iota\colon F \Rightarrow \Delta(S)$ kanonisten injektioiden muodostama luonnollinen transformaatio. Olkoon M R-moduli ja $\varepsilon\colon F \Rightarrow \Delta(M)$ luonnollinen transformaatio. Määritetään tällöin kuvaus $f\colon \bigcup_{j\in J} F(j) \to M$ siten, että kaikilla $s \in F(j)$, $j \in J$, pätee $f(s) = \varepsilon(j)$. Koska $\varepsilon(j)$ on lineaarikuvaus kaikilla $j \in J$ ja summa S on suora, niin tämä kuvaus laajenee yksikäsitteisesti lineaarikuvaukseksi $f\colon S \to M$. Se on selvästi ainoa lineaarikuvaus, jolla $f{\restriction}_{F(j)} = \varepsilon(j)$ kaikilla $j \in J$. Se on siis ainoa lineaarikuvaus, jolla $\varepsilon = \Delta(f) \circ \iota$. Suora summa S on täten objektien $F(j)$, $j \in J$, kotulo.

Kotuloja löytyy monista muistakin kategorioista. Esimerkiksi kategoriassa **Ab** niiden voi osoittaa olevan suoria summia, kategoriassa **Grp** vapaita tuloja ja kategoriassa **Top** topologisten avaruuksien erillisiä yhdisteitä (ks. [16], [7, s. 63]).

Määritelmä 6.5 (ks. [7, s. 68])**.** Funktorin F *raja* on duaalikäsite funktorin F korajalle, eli universaalimorfismi funktorista $\Delta\colon C \to C^J$ objektiin $F \in C^J$. Funktorin F rajalle voidaan käyttää merkintää $\lim F$.

Korajoille on esitetty joitakin tuloksia; rajoille pätevät näiden duaalilauseet. Esimerkiksi funktorin $F\colon \mathbf{0} \to C$ raja on kategorian C loppuobjekti, jos se on olemassa, ja funktorin $G\colon \mathbf{1} \to C$ raja on objekti $G(0)$. Funktorin F raja on olemassa, jos ja vain jos funktorin F^{op} koraja on olemassa; jos se on olemassa, niin $\lim F \cong \operatorname{colim} F^{\mathrm{op}}$.

Määritelmä 6.6 (ks. [39])**.** Olkoon J diskreetti kategoria ja $F\colon J \to C$ funktori. Tällöin objektien $F(j)$, $j \in J$, *tulo* on näiden objektien kotulon duaalikäsite, eli funktorin F raja, jos tämä raja on olemassa. Rajaan kuuluvan luonnollisen transformaation $\pi\colon \Delta(\lim F) \Rightarrow F$ komponentteja voidaan kutsua *projektioiksi*.

Esimerkki 6.10 (ks. [39])**.** Tarkastellaan pieniä tuloja joukkojen kategoriassa. Olkoon J pieni, diskreetti kategoria ja $F\colon J \to$ **Set** funktori. Todistetaan, että seuraava väite pitää paikkansa: funktorin F raja on olemassa, ja se on joukkojen $F(j)$, $j \in J$, karteesinen tulo varustettuna luonnollisella transformaatiolla, joka muodostuu kanonisista projektioista $\pi_j\colon \prod_{j\in J} F(j) \to F(j)$.

Olkoon S joukko ja $\varepsilon\colon \Delta(S) \Rightarrow F$ luonnollinen transformaatio. Määritetään kuvaus $f\colon S \to \prod_{j\in J} F(j)$ siten, että $f(x)(j) = \varepsilon(j)(x)$ kaikilla $j \in J$ ja $x \in S$. Koska $f(x)(j) = \big(\pi(j) \circ f\big)(x)$, yhtäsuuruus $\pi(j) \circ f = \varepsilon(j)$ on voimassa kaikilla $j \in J$.

Toisaalta jos $g\colon S \to \prod_{j\in J} F(j)$ on eri funktio, niin on olemassa jokin $x \in S$, jolla $g(x) \neq f(x)$. Tällöin taas on $j \in J$, jolla $\big(\pi(j)\circ g\big)(x) \neq \big(\pi(j)\circ f\big)(x)$, joten ehto $\varepsilon = \pi \circ \Delta(f)$ määrää kuvauksen f yksikäsitteisesti. Siis karteesinen tulo varustettuna kanonisilla projektioilla on todella raja.

Esimerkki 6.11 (ks. [69])**.** Pienet tulot kategoriassa R-**Mod** ovat suoria tuloja varustettuna kanonisilla projektioilla, mikä havaitaan seuraavasti.

Olkoon J pieni, diskreetti kategoria ja $F\colon \Delta(j) \to R$-**Mod** funktori. Olkoon $P = \prod_{j\in J} F(j)$ modulien $F(j)$, $j \in J$, tulomoduli ja $\pi\colon \Delta(P) \Rightarrow F$ kanonisten projektioiden muodostama luonnollinen transformaatio. Olkoon M moduli ja $\varepsilon\colon \Delta(M) \Rightarrow F$ luonnollinen transformaatio. Määritetään jälleen kuvaus $f\colon M \to P$ siten, että $f(v)(j) = \varepsilon(j)(v)$ kaikilla $j \in J$, $v \in M$. Edellisen esimerkin perusteella tämä on ainoa kuvaus $f\colon M \to P$, jolla $\pi(j) \circ f = \varepsilon(j)$ kaikilla $j \in J$. Lisäksi

$$f(rv)(j) = \varepsilon(j)(rv) = r\varepsilon(j)(v) = rf(v)(j)$$

ja

$$f(v+w)(j) = \varepsilon(j)(v+w) = \varepsilon(j)(v) + \varepsilon(j)(w) = f(v)(j) + f(w)(j)$$

kaikilla $j \in J$, $r \in R$ ja $v, w \in M$, eli $f(rv) = rf(v)$ ja $f(v+w) = f(v) + f(w)$. Siis f on ainoa lineaarikuvaus, jolla $\pi \circ \Delta(f) = \varepsilon$, ja P varustettuna kanonisilla projektioilla on havaittu tuloksi.

Kotulojen tapaan myös tuloja on monissa muissakin merkittävissä kategorioissa; esimerkiksi kategoriassa **Top** niiden voi osoittaa olevan tuloavaruuksia ja kategoriassa **Grp** suoria tuloja (ks. [7, s. 69]).

Objektien $F(j)$, $j \in J$, kotulo-objektille voidaan käyttää merkintää $\coprod_{j\in J} F(j)$. Samojen objektien tulolle voidaan käyttää merkintää $\prod_{j\in J} F(j)$. Kahden objektin c ja d kotulolle voidaan käyttää myös merkintää $c + d$ ja tulolle merkintää $c \times d$.

6.2 Rajojen ja korajojen ominaisuuksia

Esitellään seuraavaksi joitakin lauseita liittyen rajoihin ja niiden olemassaoloon. Tullaan myös havaitsemaan, että tuloilla on samanlaisia ominaisuuksia kuin niistä annetuilla esimerkeillä, karteesisilla tuloilla ja suorilla tuloilla. Esitetyistä havainnoista saadaan toki duaalisia tuloksia myös korajoille ja kotuloille.

Lause 6.4. *Olkoon $F\colon J \to C$ funktori, jolla on raja* $(\lim F, \eta)$*. Olkoon $G\colon J \to J$ isomorfismi. Tällöin* $(\lim F, \eta * G)$ *on funktorin $F \circ G$ raja.*

Todistus. Aluksi huomataan, että $\eta * G\colon \Delta(\lim F) \circ G \Rightarrow F \circ G$ on myös vaadittua muotoa $\Delta(\lim F) \Rightarrow F \circ G$.

Olkoon $\varepsilon\colon \Delta(c) \Rightarrow F \circ G$ luonnollinen transformaatio. Se on tällöin myös muotoa $\Delta(c) \circ G \Rightarrow F \circ G$. Olkoon $f\colon c \to \lim F$ morfismi. Tällöin $\varepsilon * G^{-1} = \eta \circ \Delta(f)$, jos ja vain jos $\varepsilon = (\eta \circ \Delta(f)) * G = (\eta * G) \circ \Delta(f)$. Siis koska on rajan $(\lim F, \eta)$ ominaisuuksien nojalla yksikäsitteinen f, jolla $\varepsilon * G^{-1} = \eta \circ \Delta(f)$, niin tämä f on myös ainoa morfismi, jolla $\varepsilon = (\eta * G) \circ \Delta(f)$. Siis $(\lim F, \eta * G)$ on funktorin $F \circ G$ raja. $\square$

Lause 6.5. *Olkoon $F\colon J \to C$ funktori, jolla on raja* $(\lim F, \eta)$. *Olkoon $F'\colon J \to C$ funktori ja $\varepsilon\colon F \Rightarrow F'$ luonnollinen isomorfismi. Tällöin* $(\lim F, \varepsilon \circ \eta)$ *on funktorin F' raja.*

Todistus. Huomataan ensiksi, että $\varepsilon \circ \eta$ on vaadittua muotoa $\Delta(\lim F) \Rightarrow F'$.

Olkoon $\epsilon\colon \Delta(c) \Rightarrow F'$ luonnollinen transformaatio ja $f\colon c \to \lim F$ morfismi. Tällöin $\epsilon = \varepsilon \circ \eta \circ \Delta(f)$, jos ja vain jos $\varepsilon^{-1} \circ \epsilon = \eta \circ \Delta(f)$. Siis koska rajan $(\lim F, \eta)$ ominaisuuksien nojalla on yksikäsitteinen f, jolla $\varepsilon^{-1} \circ \epsilon = \eta \circ \Delta(f)$, niin havaitaan, kuten edellisen lauseen todistuksessa, että $(\lim F, \varepsilon \circ \eta)$ on funktorin F' raja. □

Lause 6.6. *Olkoon J kategoria ja J' sen alikategoria. Olkoon $F\colon J \to C$ funktori, jolla on raja* $\lim F$ *ja η tähän liitetty luonnollinen transformaatio. Jos raja* $\lim F{\restriction}_{J'}$ *on olemassa ja η' on siihen liitetty luonnollinen transformaatio, niin on olemassa yksikäsitteinen morfismi $f\colon$* $\lim F \to \lim F{\restriction}_{J'}$, *jolla $\eta'(j') = f \circ \eta(j')$ kaikilla $j' \in J'$.*

Todistus. Koska $\eta{\restriction}_{J'}$ on luonnollinen transformaatio $\Delta(\lim F){\restriction}_{J'} \Rightarrow F{\restriction}_{J'}$, tämä yksikäsitteinen morfismi on rajan määritelmän nojalla olemassa. □

Määritelmä 6.7. Olkoon C kategoria. Jos jokaisella funktorilla $F\colon J \to C$ on raja, voidaan kategorian C sanoa *sisältävän kaikki rajat*. Jos taas jokaisella funktorilla $F\colon J \to C$, missä J on pieni, on raja, voidaan kategorian C sanoa *sisältävän kaikki pienet rajat*. Vastaavasti voidaan sanoa kategorian *sisältävän* esimerkiksi *kaikki äärelliset rajat*, *kaikki tulot*, *kaikki äärelliset korajat* ja niin edelleen.

Esimerkki 6.12. Kategorian **Set** on aiemmin havaittu sisältävän kaikki pienet tulot ja pienet kotulot.

Esimerkki 6.13. Yleisesti ottaen esijärjestys ei sisällä kaikkia äärellisiä rajoja tai korajoja; esimerkiksi joukko $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ järjestettynä jaollisuuden suhteen ei sisällä rajaa eli suurinta alarajaa (tai alarajaa ollenkaan) luvuille 2 ja 3. Toisaalta jaollisuuden suhteen järjestetty joukko $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sisältää kaikki äärelliset rajat (suurin yhteinen tekijä) ja äärelliset korajat (pienin yhteinen monikerta). Se sisältää kaikki pienet rajat, mutta ei kaikkia pieniä korajoja (esimerkiksi koko joukon $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kotuloa). Tavanomainen reaalilukujen järjestys välillä $[0, 1]$ sisältää kaikki rajat ja korajat.

Apulause 6.7. *Olkoon S joukko ja c_s, $s \in S$, sen indeksoima joukko objekteja kategoriassa C. Olkoon $x \in S$ alkio tästä joukosta. Oletetaan, että tulot $p = \prod_{x \in S \setminus \{s\}} c_x$ ja $q = p \times c_s$ ovat olemassa. Tällöin tulo $\prod_{x \in S} c_x$ on olemassa, ja q on tämä tulo.*

Todistus. Olkoot $\pi_p(x)$ projektiot $p \to c_x$, missä $x \in S \setminus \{s\}$, ja $\pi_q(j_1)\colon q \to p$ sekä $\pi_q(j_2)\colon q \to c_s$ projektiot objektista q. Määritetään projektiot $\rho(x)\colon q \to c_x$ kaikille $x \in S$ seuraavasti: jos $x = s$, niin $\rho(x) = \pi_q(j_2)$, ja muulloin $\rho(x) = \pi_p(x) \circ \pi_q(j_1)$. Osoitetaan, että q varustettuna projektioilla $\rho(x)$ on etsitty tulo.

Olkoon $F\colon S \to C$ funktori ja $\eta\colon \Delta(c) \to F$ luonnollinen transformaatio. Tällöin on tulon p määritelmän nojalla oltava olemassa yksikäsitteinen $f\colon c \to p$, jolla $\eta(x) = \pi_p(x) \circ f$ kaikilla $x \in S \setminus \{s\}$. Objektista c on siis morfismit $f\colon c \to p$ ja $\eta(s)\colon c \to c_s$. Siispä on tulon q määritelmän nojalla olemassa yksikäsitteinen morfismi $g\colon c \to q$, jolla $\eta(s) = \pi_q(j_2) \circ g = \rho(s) \circ g$ ja $f = \pi_q(j_1) \circ g$. Tällöin kaikilla $x \in S \setminus \{s\}$ pätee

$$\eta(x) = \pi_p(x) \circ f = \pi_p(x) \circ \pi_q(j_1) \circ g = \rho(x) \circ g,$$

joten kaikilla $x \in S$ pätee $\eta(x) = \rho(x) \circ g$. Tämä g oli lisäksi yksikäsitteinen. Havainnollistetaan lausetta vielä kommutoivalla kaaviolla; esitetään kaavio, joka havainnollistaa sitä, että kolmen objektin a, b, c erikoistapauksessa tulo $(a \times b) \times c$ on ternäärinen tulo $a \times b \times c$.

$$\begin{tikzcd}
a & a \times b \arrow[l, "\pi_p"'] \arrow[r, "\pi_p"] & b \\
& (a \times b) \times c \arrow[u, "\pi_q"] \arrow[d, "\pi_q"] & \\
& c & \\
& d \arrow[u, "\eta"] \arrow[uu, dashed, bend left, "g"] \arrow[uuu, dashed, bend right, "f"'] \arrow[uuul, bend left, "\eta"] \arrow[uuur, bend right, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Täten q todella on tulo $\prod_{x \in S} c_x$. □

Seuraus 6.8. *Kategoriassa C on kaikki äärelliset, epätyhjät tulot, jos ja vain jos siinä on kaikki binääriset tulot. Kategoriassa C on kaikki äärelliset tulot, jos ja vain jos siinä on kaikki binääriset tulot ja loppuobjekti (ks. [7, s. 73]).*

Lause 6.9 (ks. [69])**.** *Jos tulo $a \times b$ on olemassa, niin myös $b \times a$ on ja $a \times b = b \times a$ siinä mielessä, että objekti p on tulo $a \times b$, jos ja vain jos se on tulo $b \times a$. Yleisestikään tulon tekijäobjektien permutointi ei vaikuta tulo-objektin olemassaoloon tai arvoon.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 6.4. □

Lause 6.10 (ks. [69])**.** *Jos tulot $a \times b$, $b \times c$, $(a \times b) \times c$ ja $a \times (b \times c)$ ovat olemassa, niin $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ siinä mielessä, että objekti p on tulo $(a \times b) \times c$, jos ja vain jos se on tulo $a \times (b \times c)$.*

Todistus. Muodostetaan ekvivalenssiketju käyttäen edellisiä lauseita:

$$\begin{aligned}
&\text{objekti } p \text{ on tulo } (a \times b) \times c \\
\iff &p \text{ on tulo } a \times b \times c \\
\iff &p \text{ on tulo } b \times c \times a \\
\iff &p \text{ on tulo } (b \times c) \times a \\
\iff &p \text{ on tulo } a \times (b \times c).
\end{aligned}$$

Tässä siis tulot ilman sulkeita ovat ternäärisiä. □

Huomautus. Edellisessä lauseessa oletettiin, että kaikki mainitut tulot ovat olemassa. Tämä oletus on välttämätön, sillä tulo $(a\times b)\times c$ voi olla olemassa, vaikka $a\times(b\times c)$ ei olisi. Tämän voi havaita esimerkiksi tarkastelemalla joukon $\mathbb{Z}_+ \setminus \{6\}$ järjestystä jaollisuuden suhteen sekä objekteja $a = 1$, $b = 12$, $c = 18$. Tässä kategoriassa tulot ovat suurimpia alarajoja jaollisuuden suhteen. Havaitaan, että tuloa $b\times c$ ei ole, joten myöskään tuloa $a \times (b \times c)$ ei ole; toisaalta tulot $a \times b = 1$ ja $(a \times b) \times c = 1$ ovat olemassa.

6.3 Rajat, korajat ja funktorit

Tässä alaluvussa esitellään kaksi rajojen ja funktorien välistä suhdetta. Ensiksi havaitaan, että kuvaus funktoreista niiden rajoihin, $F \mapsto \lim F$, voidaan sopivissa kategorioissa täydentää luontevasti funktoriksi. Toiseksi käsitellään rajojen säilyvyyttä, kun niitä kuvataan jonkin funktorin kautta.

Esitellyt tulokset yleistyvät duaalisesti myös korajoille.

Apulause 6.11. *Olkoot C ja J kategorioita. Olkoon $F_1\colon J \to C$ funktori, jolla on raja (L_1, η_1), ja olkoon $F_2\colon J \to C$ myös funktori, jolla on raja (L_2, η_2). Olkoon vielä $\varepsilon\colon F_1 \Rightarrow F_2$ luonnollinen transformaatio. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen morfismi $f\colon L_1 \to L_2$, jolla $\eta_2 \circ \Delta(f) = \varepsilon \circ \eta_1$.*

Todistus. Huomataan, että $\varepsilon \circ \eta_1$ on luonnollinen transformaatio $\Delta(L_1) \Rightarrow F_2$. Morfismin f olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraavat siis rajan L_2 ominaisuuksista. □

Lause 6.12. *Olkoot C ja J kategorioita. Oletetaan, että kaikille $F\colon J \to C$ voidaan käytetyillä aksioomilla valita jokin raja (L_F, ε_F). Määritetään kuvaus $L\colon C^J \to C$ siten, että*

- *$L(F) = L_F$ kaikilla funktoreilla $F\colon J \to C$ ja*
- *$L(\eta)$ on kaikilla luonnollisilla transformaatioilla $\eta\colon F \to G$ se yksikäsitteinen morfismi $L_F \to L_G$, jolla $\varepsilon_G \circ \Delta\big(L(\eta)\big) = \eta \circ \varepsilon_F$.*

Tällöin kuvaus L on funktori. Lisäksi sillä, miten rajat valitaan, ei ole väliä; kaikki tällaiset funktorit ovat keskenään luonnollisesti isomorfisia.

Todistus. Koska $\varepsilon_F \circ \Delta(\mathrm{id}_{L_F}) = \mathrm{id}_F \circ \varepsilon_F$, on $L(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{L_F}$ kaikilla $F\colon J \to C$. Olkoot nyt $F, G, H\colon J \to C$ funktoreita ja $\eta_1\colon F \Rightarrow G, \eta_2\colon G \Rightarrow H$ luonnollisia transformaatioita. Tällöin

$$\varepsilon_H \circ \Delta\big(L(\eta_2) \circ L(\eta_1)\big) = \varepsilon_H \circ \Delta\big(L(\eta_2)\big) \circ \Delta\big(L(\eta_1)\big) = \eta_2 \circ \varepsilon_G \circ \Delta\big(L(\eta_1)\big) = \eta_2 \circ \eta_1 \circ \varepsilon_F,$$

joten $L(\eta_2) \circ L(\eta_1) = L(\eta_2 \circ \eta_1)$. Siis L on funktori.

Olkoon nyt $L'\colon C^J \to C$ toinen tällainen funktori eri tavalla valituilla rajoilla (L'_F, ε'_F). Olkoon $\epsilon(F)$ se yksikäsitteinen isomorfismi $L(F) \to L'(F)$, jolla pätee $\varepsilon'_F \circ \Delta\big(\epsilon(F)\big) = \varepsilon_F$, kaikilla $F \in C^J$. Tällöin

$$\varepsilon'_G \circ \Delta\big(\epsilon(G) \circ L(\eta)\big) = \varepsilon_G \circ \Delta\big(L(\eta)\big) = \eta \circ \varepsilon_F = \eta \circ \varepsilon'_F \circ \Delta\big(\epsilon(F)\big) = \varepsilon'_G \circ \Delta\big(L'(\eta) \circ \epsilon(F)\big)$$

kaikilla $\eta\colon F \Rightarrow G$, joten on oltava voimassa $\epsilon(G) \circ L(\eta) = L'(\eta) \circ \epsilon(F)$ kaikilla $\eta\colon F \Rightarrow G$. Siis ϵ on luonnollinen isomorfismi $L \Rightarrow L'$. □

Merkinnällä $\lim\colon C^J \to C$ voidaan viitata mihin tahansa edellä esitellyn funktorin L kaltaiseen funktoriin. Jos J on diskreetti, voidaan käyttää myös tulomerkintää, esimerkiksi $- \times -\colon C \times C \to C$.

Määritelmä 6.8 (ks. [38])**.** Olkoot C, D, J kategorioita ja $F\colon J \to C$ funktori, jolla on raja. Olkoon $G\colon C \to D$ funktori. Tällöin G *säilyttää funktorin F rajan* $(\lim F, \eta)$, jos $\big(G(\lim F), G*\eta\big)$ on funktorin $G \circ F$ raja. Tämän voi kuvailla myös kommutoivilla kaavioilla: jos kaavio

$$\begin{tikzcd} \Delta^J_C(\lim F) \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] & F \\ \Delta^J_C(c) \arrow[u, Rightarrow, "\Delta^J_C(!)"] \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $\epsilon\colon \Delta^J_C(c) \Rightarrow F$, niin myös kaavio

$$\begin{tikzcd} \Delta^J_D\big(G(\lim F)\big) \arrow[r, Rightarrow, "G*\eta"] & G \circ F \\ \Delta^J_D(d) \arrow[u, Rightarrow, "\Delta^J_D(!)"] \arrow[ur, Rightarrow, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $\varepsilon\colon \Delta^J_D(d) \Rightarrow G \circ F$.

Samoin jos $(\operatorname{colim} F, \eta)$ ja $\big(G(\operatorname{colim} F), G * \eta\big)$ ovat korajoja, niin G *säilyttää funktorin F korajan* $(\operatorname{colim} F, \eta)$.

Jos G säilyttää kaikkien funktorien $F\colon J \to C$ olemassaolevat rajat, niin se säilyttää kaikki rajat. Jos G säilyttää kaikkien funktorien $F\colon J \to C$, missä J on pieni, olemassaolevat rajat, niin se säilyttää kaikki pienet rajat. Vastaavasti voidaan funktorin sanoa säilyttävän esimerkiksi äärelliset rajat, tulot, äärelliset kotulot ja niin edelleen.

Edellisessä määritelmässä mainittu luonnollinen transformaatio $G * \eta$ on muotoa $G \circ \Delta^J_C(\lim F) \Rightarrow G \circ F$. Toisaalta rajan määritelmän mukaan sen tulisi olla muotoa $\Delta^J_D(d) \Rightarrow G \circ F$ jollakin $d \in D$, jotta se voisi olla osa jotakin funktorin $G \circ F$ rajaa. Tämä ei kuitenkaan ole ongelma, sillä $G \circ \Delta^J_C(\lim F) = \Delta^J_D\big(G(\lim F)\big)$ diagonaalifunktorin ominaisuuksien perusteella.

Havaitaan myös, että rajan ja korajan säilyminen ovat duaalisia ehtoja: G säilyttää rajan $(\lim F, \eta)$, jos ja vain jos G^{op} säilyttää korajan $(\lim F, \eta^{\mathrm{op}}) = (\operatorname{colim} F^{\mathrm{op}}, \eta^{\mathrm{op}})$.

Lause 6.13. *Jos funktori $G\colon C \to D$ säilyttää funktorin $F\colon J \to C$ jonkin rajan, niin se säilyttää funktorin F minkä tahansa rajan. Duaalisesti vastaava pätee myös korajoille.*

Todistus. Olkoot (L, η) ja (L', η') funktorin F rajoja, ja oletetaan että G säilyttää rajan (L, η).

Hyödynnetään lausetta 6.1. On yksikäsitteinen isomorfia $f\colon L \to L'$, jolla pätee $\Delta(f) \circ \eta = \eta'$. Siis on isomorfia $g\colon G(L) \to G(L')$, jolla $\Delta(g) \circ (G * \eta) = G * \eta'$, nimittäin $g = G(f)$. Jos $J = \mathbf{0}$, niin tämä g on yksikäsitteinen ja $G(L')$ on siten funktorin $G \circ F$ raja, sillä $G(L') \cong G(L)$ ja $G(L)$ on funktorin $G \circ F$ rajana loppuobjekti. Oletetaan nyt, että $J \neq \mathbf{0}$.

Olkoon $g' \colon G(L) \to G(L')$ isomorfia, ja oletetaan, että myös sille pätee ehto $\Delta(g') \circ (G * \eta) = G * \eta'$. Selvästi $\Delta(g^{-1}) \circ (G * \eta') = G * \eta$. Koska siis on voimassa $\Delta(g^{-1}) \circ \Delta(g') \circ (G * \eta) = G * \eta$ ja $\big(G(L), G * \eta\big)$ on oletusten mukaan raja, niin $g^{-1} \circ g' = \mathrm{id}_{G(L)}$, joten $g = g'$. Siis $\big(G(L'), G * \eta'\big)$ on funktorin $G \circ F$ raja. □

Lause 6.14 (ks. [28]). *Olkoon C lokaalisti pieni kategoria ja $c \in C$ objekti. Tällöin molemmat funktorit* $\hom_C(c, -) \colon C \to \mathbf{Set}$ *ja* $\hom_C(-, c) \colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *säilyttävät kaikki rajat.*

Todistus. Osoitetaan ensiksi, että $\hom_C(c, -)$ säilyttää kaikki rajat.

Olkoon $F \colon J \to C$ funktori, jolla on raja $(\lim F, \eta)$. Olkoon toisaalta $d \in \mathbf{Set}$ objekti ja $\varepsilon \colon \Delta(d) \Rightarrow \hom(c, -) \circ F$ luonnollinen transformaatio. Osoitetaan, että on olemassa yksikäsitteinen $f \colon d \to \hom_C(c, \lim F)$, jolla $\varepsilon = \big(\hom_C(c, -) * \eta\big) \circ \Delta(f)$.

Määritetään kaikille $x \in d$ kuvaus $g_x \colon \mathrm{Ob}_J \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}$ siten, että $g_x(j) = \varepsilon(j)(x)$ kaikilla $j \in J$. Tällöin $g_x(j)$ on morfismi $c \to F(j)$ kaikilla $j \in J$ ja

$$g_x(j') = \varepsilon(j')(x) = \Big(\hom_C\big(c, F(h)\big) \circ \varepsilon(j)\Big)(x) = F(h) \circ \varepsilon(j)(x) = F(h) \circ g_x(j)$$

kaikilla $h \colon j \to j'$, joten kuvaukset g_x ovat luonnollisia transformaatioita $\Delta(c) \Rightarrow F$. Koska funktorilla F on raja $(\lim F, \eta)$, niin voidaan asettaa arvoksi $f(x)$ se yksikäsitteinen morfismi $c \to \lim F$, jolla $g_x = \eta \circ \Delta\big(f(x)\big)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\varepsilon(j)(x) &= g_x(j) \\
&= \Big(\eta \circ \Delta\big(f(x)\big)\Big)(j) \\
&= \eta(j) \circ f(x) \\
&= \eta(j) \circ \Delta(f)(j)(x) \\
&= \Big(\big(\hom_C(c, -) * \eta\big) \circ \Delta(f)\Big)(j)(x)
\end{aligned}$$

kaikilla $j \in J$ ja $x \in d$, joten $\varepsilon = \big(\hom_C(c, -) * \eta\big) \circ \Delta(f)$. Toisaalta jos jollakin $f' \colon d \to \hom_C(c, \lim F)$ pätee $\varepsilon = \big(\hom_C(c, -) * \eta\big) \circ \Delta(f')$, niin seuraamalla vastaavanlaista yhtäsuuruusketjua toiseen suuntaan havaitaan, että $\eta \circ \Delta\big(f'(x)\big) = g_x(j)$ kaikilla $j \in J$, joten morfismia $f(x)$ koskevan yksikäsitteisyyden nojalla $f'(x) = f(x)$.

Siis $\big(\hom_C(c, \lim F), \hom_C(c, -) * \eta\big)$ on funktorin $\hom_C \circ F$ raja, joten $\hom_C(c, -)$ säilyttää kaikki rajat. Koska tämä pätee mielivaltaisessa lokaalisti pienessä kategoriassa C, niin myös $\hom_C(-, c) = \hom_{C^{\mathrm{op}}}(c, -)$ säilyttää kaikki rajat.

□

7 Joukko-opillisesta perustasta

Luodaan ennen tutkielman pääaiheeseen, liittofunktoreihin, siirtymistä lyhyt katsaus erilaisiin kategoriateoriaa koskettaviin joukko-opillisiin ongelmiin sekä näiden mahdollisiin ratkaisuihin.

Tähän mennessä on selvästi havaittu, että tavanomaiset Zermelo–Fraenkelin joukko-opin käsitteet ja aksioomat eivät riitä kategoriateorian tarpeisiin. Järjestelmässä ZFC ei esimerkiksi tunneta luokan käsitettä, eikä se tästä syystä sovellu muiden kuin pienten kategorioiden tarkasteluun. Kuitenkin monet suuret kategoriat, kategoriateorian näkökulmasta erityisesti **Set**, ovat hyvin hyödyllisiä, ja sen vuoksi olisikin järkevää valita sellainen joukko-oppi, jossa voidaan käsitellä vaivatta myös suuria kategorioita, jos jokin joukko-opillinen aksiomatisointi halutaan valita käyttöön.

On määritelty joitakin järjestelmän ZFC laajennuksia, jotka sisältävät myös luokan käsitteen. Näitä ovat muunmuassa von Neumann–Bernays–Gödelin järjestelmä NBG (ks. [68]) ja Morse–Kelleyn järjestelmä MK (ks. [67]). Näissä voidaan muodostaa kaikkien joukkojen luokka sekä tämän osaluokkia, kuten kaikkien ryhmien luokka. Luokat eivät kuitenkaan voi sisältää luokkia, mikä rajoittaa niiden hyödyllisyyttä. Esimerkiksi tavanomaista konstruktiota kuvausten $s \to t$ joukolle, missä s ja t ovat joukkoja, ei voi yleistää koskemaan kuvauksia $C \to D$, missä C ja D ovat aitoja luokkia. Tämä kuvausten joukkohan yleensä määritellään tietyksi joukon $\mathcal{P}(s \times t)$ osajoukoksi, mutta "potenssiluokkaa" $\mathcal{P}(C \times D)$ ei ole olemassa, sillä se olisi luokka, joka sisältää luokkia. Funktorikategoriaa D^C, missä C on suuri, ei voida määritellä näissä aksioomajärjestelmissä (ks. [31], [4, s. 154, 155]).

Luokkien sijasta voidaan aihetta lähestyä myös nk. Grothendieckin universumien kautta. Tässä lähestymistavassa käytetään järjestelmän ZFC aksioomia täydennettynä eräällä lisäaksioomalla. Määritellään ensiksi Grothendieckin universumi ja esitellään joitakin sen perusominaisuuksia (käyttäen järjestelmää ZFC). Tämän jälkeen esitellään mainittu lisäaksiooma.

Määritelmä 7.1 (vrt. [27], [7, s. 22–24])**.** Olkoon U joukko. Se on *Grothendieckin universumi*, jos sille pätevät seuraavat ehdot:

- $\mathbb{N} \in U$,
- kun $x \in U$ ja $y \in x$, niin $y \in U$,
- kun $x \in U$, niin $\mathcal{P}(x) \in U$ ja
- kun $x \in U$ on joukko ja $f : x \to U$ funktio, niin $\bigcup_{y \in x} f(y) \in U$.

Grothendieckin universumia voi kutsua lyhyemmin myös universumiksi. Joukon U alkioita voi kutsua *U-joukoiksi* ja joukon U osajoukkoja *U-luokiksi*. Jos jokin U-luokka ei ole U-joukko, sitä voidaan kutsua *aidoksi U-luokaksi*. Kaikki U-joukot ovat U-luokkia, sillä U-joukon alkiot ovat myös universumin U alkioita.

On huomattava, että universumi voidaan joskus määritellä myös ilman ehtoa $\mathbb{N} \in U$ tai korvaamalla tämä ehdolla $\emptyset \in U$. Nämä määritelmät eivät ole esitetyn kanssa yhtäpitäviä; esimerkiksi ilman kyseistä ehtoa $\emptyset$ on universumi ja korvaavalla ehdolla perinnöllisesti äärellisten joukkojen joukko V_ω on universumi. Kumpikaan ei sisällä ääretöntä joukkoa $\mathbb{N}$.

Apulause 7.1. *Olkoon U universumi. Tällöin*

- *kaikilla $\emptyset \neq a \in U$ on sellainen $t \in a$, että $t \cap a = \emptyset$ ja*
- *kaikilla $a, b \in U$ pätee $a = b \iff \forall t \in U(t \in a \iff t \in b)$.*

Todistus. Ensimmäinen kohta seuraa suoraan säännöllisyysaksioomasta. Toinen kohta seuraa ekstensionaalisuusaksioomasta sekä siitä, että jos $t \in a$ tai $t \in b$, niin $t \in U$, kun $a, b \in U$. □

Apulause 7.2 (vrt. [7, s. 22])**.** *Olkoon U universumi. Tällöin*

- *on voimassa $\emptyset \in U$,*
- *kaikilla $a \in U$ ja $a' \subseteq a$ pätee $a' \in U$,*
- *kaikilla $a, b \in U$ pätee $\{a, b\} \in U$,*
- *kaikilla $a \in U$ pätee $\cup a \in U$ ja*
- *kaikilla $a \in U$, $c \subseteq U$ ja $f : a \to c$ pätee* $\mathrm{Im}(f) \in U$.

Todistus (ks. [27]). Koska $\mathbb{N} \in U$, niin $n \in U$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti $0 = \emptyset \in U$ ja $2 = \{0, 1\} \in U$. Olkoot nyt $a, b \in U$ ja $c \subset U$ joukkoja ja $f : a \to c$ funktio.

Jos $a' \subseteq a$, niin $a' \in \mathcal{P}(a) \in U$, ja siten $a' \in U$.

Koska $a \in U$, niin $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(a) \in U$, ja siten $\{a\} \in U$. Samoin $\{b\} \in U$. Määritetään nyt funktio $g : 2 \to U$ siten, että $g(0) = \{a\}$ ja $g(1) = \{b\}$. Tällöin $\{a, b\} = \bigcup_{y \in 2} g(y) \in U$.

Koska kaikilla $\alpha \in a$ pätee $\alpha \in U$, niin määrittää yhtäsuuruus $g(\alpha) = \alpha$ kuvauksen $g : a \to U$. Siispä $\cup a = \bigcup_{\alpha \in a} \alpha = \bigcup_{\alpha \in a} g(\alpha) \in U$.

Lopuksi koska kaikilla $\alpha \in a$ pätee $f(\alpha) \in U$ ja edelleen $\{f(\alpha)\} \in U$, niin määrittää yhtäsuuruus $g(\alpha) = \{f(\alpha)\}$ kuvauksen $g : a \to U$. On siis voimassa $\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{\alpha \in a} \{f(\alpha)\} \in U$.

Nyt kaikki väitetyt universumin ominaisuudet on todistettu. □

Lause 7.3 (vrt. [7, s. 22–23])**.** *Olkoon U universumi. Tällöin U varustettuna tavanomaisella alkiorelaatiolla $\in$ on järjestelmän ZFC malli (itse asiassa voitaisiin osoittaa, että U-joukot ja U-luokat muodostavat järjestelmän NBG mallin).*

Todistus. Lauseen 7.1 perusteella U toteuttaa ekstensionaalisuus- ja säännöllisyysaksioomat. Lauseen 7.2 perusteella U toteuttaa erotteluaksioomat, sillä minkä tahansa U-joukon kaikki osajoukot ovat U-joukkoja. Myös tyhjän joukon, parien ja yhdisteiden aksioomat toteutuvat lauseen 7.2 perusteella. Äärettömyys- ja potenssijoukkoaksioomat seuraavat universumin määritelmästä.

Olkoon ϕ logiikan kaava, jolla on vapaat muuttujat $x, y, w_1, \ldots, w_n$. Olkoot $a, w_1, \ldots, w_n \in U$ joukkoja. Oletetaan, että kaikilla $x \in a$ on yksikäsitteinen $y \in U$, jolla $\phi(x, y, w_1, \ldots, w_n)$ pätee. Tällöin on olemassa kuvaus $f: a \to U$,

$$f(x) = y \iff \phi(x, y, w_1, \ldots, w_n)$$

kaikilla $x \in a$ ja $y \in U$. Nyt lauseen 7.2 perusteella $\mathrm{Im}(f) \in U$. Koska $a, w_1, \ldots, w_n$ olivat mielivaltaisia, toteuttaa U korvausaksioomat.

Valinta-aksiooman kanssa ekvivalentti väite on (kun muut aksioomat ovat voimassa), että minkä tahansa joukon voi hyvinjärjestää. Koska minkä tahansa joukon voi hyvinjärjestää, voi myös minkä tahansa U-joukon u hyvinjärjestää. Olkoon R joukon u hyvinjärjestys. Tällöin R on joukon $\mathcal{P}(u \times u)$ alkio. Koska $u \in U$, myös $u \times u \subseteq \mathcal{P}^2(u) \in U$, ja siten $u \times u \in U$. Edelleen $\mathcal{P}(u \times u) \in U$, ja siten $R \in U$. Siis U toteuttaa myös valinta-aksiooman.

Siis U toteuttaa kaikki järjestelmän ZFC aksioomat ja on tämän malli. □

Seuraus 7.4 (ks. [7, s. 22]). *Minkä tahansa universumin U "sisällä" voidaan käyttää vapaasti tunnettuja järjestelmän ZFC ominaisuuksia; esimerkiksi U sisältää kaikki U-joukkojen karteesiset tulot, yhdisteet ja leikkaukset (kunhan myös indeksijoukkoina käytetään U-joukkoja) sekä kuvaukset $u \to v$ ja funktiojoukot u^v, missä u ja v ovat mielivaltaisia U-joukkoja.*

Lause 7.5. *Olkoon U universumi ja $u \in U$. Tällöin U on aidosti suurempi kuin u: ei ole olemassa surjektiota $u \to U$ (ekvivalentisti ei ole olemassa injektiota $U \to u$).*

Todistus. Oletetaan, että on olemassa surjektio $f: u \to U$. Tällöin $U = \mathrm{Im}(f) \in U$, mikä on tunnetusti ristiriita. □

Lause 7.6. *Olkoon U universumi ja $u \subseteq U$. Tällöin u on aito U-luokka, jos $u \approx U$.*

Todistus. Jos $u \approx U$, niin edellisen lauseen nojalla u ei voi olla U-joukko ja on siis aito U-luokka. □

Nyt on kategoriateorian kannalta käytännöllistä lisätä aksioomaksi oletus, jonka mukaan kaikilla joukoilla u on universumi U siten, että $u \in U$ (ks. [7, s. 24]). Tällöin voidaan tarkastella joukkojen kategorian **Set** sijasta U-joukkojen kategorioita U- **Set**, missä U on mikä tahansa universumi. Tällaisen kategorian objekteina ovat U-joukkojen U-luokka U, morfismeina kaikki kuvaukset U-joukkojen välillä ja yhdisteenä tavanomainen kuvausten yhdiste. Koska joukko u^v on U-joukko kaikilla joukoilla $u, v \in U$, tällaisen kategorian morfismit muodostavat U-luokan. Samalla tavoin voidaan määritellä universumiin U sisältyvien Abelin ryhmien kategoria U- **Ab** ja muita vastaavanlaisia kategorioita. (Ks. [27])

Näiden kategorioiden välille voidaan edelleen määritellä entiseen tapaan vapaita funktoreita, unohdusfunktoreita ynnä muita. Lisäksi jos kiinnitetään jokin universumi U, niin voidaan edelleen puhua U-pienistä, U-suurista ja lokaalisti U-pienistä kategorioista korvaamalla tavanomaisista suuren, pienen ja lokaalisti pienen kategorian määritelmistä joukot U-joukoilla ja aidot luokat aidoilla U-luokilla. Koska U ei ole U-joukko, on U- **Set** tällöin U-suuri kategoria. Koska u^v on U-joukko kaikilla $u, v \in U$, on U- **Set** myös lokaalisti U-pieni. Koska vapaa funktori U- **Set** $\to$ U- **Ab** on objektien suhteen injektio, on oltava voimassa $U \approx \mathrm{Ob}_{U\text{-}\mathbf{Ab}} \subseteq U$, ja myös U- **Ab** on U-suuri. Selvästi myös U- **Ab** on lokaalisti U-pieni. On kuitenkin huomattava U-pienuudesta ja U-suuruudesta puhuttaessa, että on olemassa kategorioita, jotka eivät ole U-pieniä eivätkä U-suuria (ks. [27]). Jos esimerkiksi U ja U' ovat universumeja ja $U \in U'$, niin kategoria U'- **Set** on liian "suuri" ollakseen edes U-suuri. Toinen huomion arvoinen seikka on, että "suuruus" ei viittaa pelkästään joukon kokoon. Esimerkiksi jos jälleen $U \in U'$, niin joukko $\{U'\}$, vaikka se koostuukin vain yhdestä alkiosta, ei kuulu mihinkään U-joukkoon tai U-luokkaan (ks. [7, s. 24])

Jos käytetään vain tällaisia universumin sisällä määriteltyjä kategorioita, jotka siis koostuvat joukoista (eikä luokista) objekteja ja morfismeja, vältetään monet aiemmin mainitut joukko-opilliset ongelmat. Oletetaan esimerkiksi, että on kiinnitetty jokin universumi U sekä U-suuret kategoriat C ja D, ja halutaan tarkastella kategoriaa D^C. Tällöin voidaan siirtyä suurempaan universumiin U', jolla $U \in U'$, ja havaita, että koska C ja D ovat U'-pieniä, on kategoria D^C myös U'-pieni. Tässä suuremmassa universumissa kategorian D^C käsittely on siis joukko-opillisesti helppoa.

Tällä tavalla universumit mahdollistavat monien mielenkiintoisten kategorioiden käytön. On kuitenkin huomattava, että esimerkiksi kaikkien joukkojen (eikä vain kaikkien U-joukkojen) kategoriaa **Set** ei voida edelleenkään tutkia ongelmattomasti. Sama koskee "kaikkien kategorioiden kategoriaa", vaikka kaikkien U-pienten kategorioiden kategoria voidaankin muodostaa millä tahansa universumilla U. Usein kuitenkin riittää, että implisiittisesti rajoitutaan johonkin universumiin, ja uudelleenmääritellään kaikki suuret kategoriat niiden U-suuriksi vastineiksi – esimerkiksi kategorian **Set** ymmärretään tällöin olevan sama kuin U- **Set**, missä U on sillä hetkellä käytössä oleva universumi. Intuitiivisesti ajatellenhan U- **Set** on tarpeeksi suuri kaikkiin käytännön tarpeisiin, koska U on järjestelmän ZFC malli. (Ks. [27])

Tällä lähestymistavalla voidaan ratkaista myös alaluvussa 4.3 esiin tuotu ongelma kategorioiden välisen isomorfismin samastamisesta jonkin kategorian sisällä olevan isomorfismin kanssa. Jos nimittäin kategoriat C ja D määritellään käyttäen joukkoja, niin C on U-pieni ja D on U'-pieni joillakin universumeilla U ja U'. Edelleen on universumi U'', jolla $\{U, U'\} \in U''$ ja joka siten sisältää alkioina universumit U ja U'. Siten C ja D ovat molemmat U''-pieniä. Jos nyt $F\colon C \to D$ on funktori, niin se on isomorfismifunktori täsmälleen silloin, kun se on isomorfismi U''-pienten kategorioiden kategoriassa U''- **Cat**.

Samoin esimerkiksi kategorian luurangon sekä rajafunktorin arvojen valinta onnistuu helposti universumeja ja tavanomaista valinta-aksioomaa käyttämällä.

8 Liittofunktorit

Tässä luvussa tarkastellaan tutkielman pääaihetta, liittofunktoreita. Ensiksi määritellään liittofunktorit. Tämän jälkeen tarkastellaan joitakin liittofunktorien merkittäviä ominaisuuksia sekä vaihtoehtoisia määrittelytapoja. Lopuksi esitellään vielä lisäesimerkkejä liittofunktoreista sekä tarkastellaan liittofunktorien merkitystä.

8.1 Liittofunktorien määritelmä

Määritellään aluksi liittofunktorit ja esitellään joitakin esimerkkejä niistä. Kuten edellä mainittiin, osaa tutkielmassa esiteltävistä liittofunktorien esimerkeistä ei kuitenkaan käydä läpi nyt, vaan ne jätetään alalukuun 8.4. Näin tehdään, jotta kyseisessä alaluvussa voidaan esimerkkejä käsiteltäessä soveltaa siihen asti löydettyjä tuloksia ja havainnollistaa siten myös niiden käyttämistä. Lukija voi halutessaan silmäillä näitäkin esimerkkejä jo tämän alaluvun esimerkkien ohessa, vaikka vielä ei ehkä käykään selväksi, miksi niissä esitellyt liittofunktorit ovat todella liittofunktoreita.

Määritelmä 8.1 (ks. [7, s. 80–81])**.** Olkoot C, D lokaalisti pieniä kategorioita, $F\colon C \to D$, $G\colon D \to C$ funktoreita ja $\phi\colon \hom_D\big(F(-_1), -_2\big) \Rightarrow \hom_C\big(-_1, G(-_2)\big)$ luonnollinen isomorfismi. Tällöin kolmikko (F, G, ϕ) on *liitos* kategoriasta C kategoriaan D, F on funktorin G *vasen liittofunktori* ja G on funktorin F *oikea liittofunktori*. Jatkossa ilmauksen ”F ja G ovat liittofunktoreita” ymmärretään tarkoittavan, että nämä funktorit ovat liittofunktoreita nimenomaan tässä järjestyksessä: F on funktorin G vasen liittofunktori. Tämä voidaan esittää myös notaatiolla $F \dashv G$.

Edellisen määritelmän kuvauksen ϕ luonnollisuusehto voidaan esittää kommutoivina kaavioina

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & \hom\big(F(c), d\big) \arrow[r, "\phi(c,d)"] & \hom\big(c, G(d)\big) \\ c' & \hom\big(F(c'), d\big) \arrow[r, "\phi(c',d)"] \arrow[u, "\hom(F(f),d)"'] & \hom\big(c', G(d)\big) \arrow[u, "\hom(f,G(d))"'] \end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"] & \hom\big(F(c), d\big) \arrow[r, "\phi(c,d)"] \arrow[d, "\hom(F(c),g)"] & \hom\big(c, G(d)\big) \arrow[d, "\hom(c,G(g))"] \\ d' & \hom\big(F(c), d'\big) \arrow[r, "\phi(c,d')"] & \hom\big(c, G(d')\big), \end{tikzcd}$$

missä $c, c' \in C$, $d, d' \in D$ ja $f\colon c \to c'$ sekä $g\colon d \to d'$ ovat mielivaltaisia. Tästä ehdosta saadaan myös yhtäsuuruudet

$$\begin{aligned}\phi(c,d)\big(h \circ F(f)\big) &= \Big(\phi(c,d) \circ \hom\big(F(f), d\big)\Big)(h) \\ &= \Big(\hom\big(f, G(d)\big) \circ \phi(c',d)\Big)(h) \\ &= \phi(c',d)(h) \circ f\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\phi(c',d')(g \circ h) &= \Big(\phi(c',d') \circ \hom\big(F(c'), g\big)\Big)(h) \\ &= \Big(\hom\big(c', G(g)\big) \circ \phi(c',d)\Big)(h) \\ &= G(g) \circ \phi(c',d)(h)\end{aligned}$$

kaikilla $c, c' \in C$, $d, d' \in D$, $f\colon c \to c'$, $g\colon d \to d'$ ja $h\colon F(c') \to d$ (ks. [7, s. 80–81]). Vastaavasti käänteiselle luonnolliselle transformaatiolle ϕ^{-1} saadaan yhtäsuuruudet

$$\phi^{-1}(c,d)(h \circ f) = \phi^{-1}(c',d)(h) \circ F(f)$$

ja

$$\phi^{-1}(c',d')(G(g) \circ h) = g \circ \phi^{-1}(c',d)(h)$$

kaikilla $c, c' \in C$, $d, d' \in D$, $f\colon c \to c'$, $g\colon d \to d'$ ja $h\colon c' \to G(d)$.

Esimerkki 8.1. Kolmikko $(\mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_C, \mathrm{id}_{\hom_C})$ on liitos kaikissa lokaalisti pienissä kategorioissa C.

Esimerkki 8.2. Olkoot C, D esijärjestyksiä ja $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ funktoreita. On olemassa isomorfia $\phi(c,d)\colon \hom\big(F(c), d\big) \to \hom\big(c, G(d)\big)$, jos ja vain jos

$$F(c) \leq d \iff c \leq G(d).$$

Oletetaan vielä, että tällainen isomorfia $\phi(c,d)$ on olemassa kaikilla $c \in C$ ja $d \in D$. Tällöin ϕ on luonnollinen, jos ja vain jos

$$\phi(c',d') \circ \hom\big(F(f), g\big) = \hom\big(f, G(g)\big) \circ \phi(c,d)$$

kaikilla morfismeilla $f\colon c \to c'$, $g\colon d \to d'$. Yhtäsuuruuden molemmilla puolilla on funktiot muotoa $\hom\big(F(c), d\big) \to \hom\big(c', G(d')\big)$. Koska joukossa $\hom\big(c', G(d')\big)$ on enintään yksi alkio, kyseisten funktioiden on oltava sama funktio. Siis F ja G ovat liittofunktoreita täsmälleen silloin, kun $F(c) \leq d$ ja $c \leq G(d)$ ovat yhtäpitäviä kaikilla $c \in C$, $d \in D$.

Edellisessä esimerkissä kuvailtiin nk. Galois'n vastaavuus (ks. [57]) kahden monotonisen funktion välillä. Mainitaan pari esimerkkiä tällaisesta vastaavuudesta. Tarkastellaan ensiksi reaalilukujen pyöristämistä ylöspäin ja alaspäin, eli funktioita $\lceil - \rceil$ ja $\lfloor - \rfloor$ (ks. [54]). Kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$ pätevät

$$\lceil x \rceil \leq_{\mathbb{Z}} n \iff x \leq_{\mathbb{R}} n$$

ja

$$n \leq_{\mathbb{R}} x \iff n \leq_{\mathbb{Z}} \lfloor x \rfloor,$$

joten upotus $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ on funktorin $\lceil - \rceil$ oikea ja funktorin $\lfloor - \rfloor$ vasen liittofunktori.

Toisena esimerkkinä tarkastellaan kunnan F polynomirenkaan $F[x_1, \dots, x_n]$ ideaaleja I_F ja avaruuden F^n varistoja V_F. Kuvaukset $V\colon I_F \to V_F$, joka kuvaa ideaalin sen määräämäksi varistoksi, ja $I\colon V_F \to I_F$, joka kuvaa variston sen määräämäksi ideaaliksi, ovat tunnetusti funktoreita, kun I_F järjestetään relaatiolla $\subseteq$ ja V_F relaatiolla $\supseteq$. Koska $V\big(I(v)\big) = v$ kaikilla varistoilla $v \in V_F$ ja $i \subseteq I\big(V(i)\big)$ kaikilla ideaaleilla $i \in I_F$, niin implikaatiot

$$i \subseteq I(v) \implies V(i) \supseteq V\big(I(v)\big) = v$$

ja

$$V(i) \supseteq v \implies i \subseteq I\big(V(i)\big) \subseteq I(v)$$

ovat voimassa, ja siten V ja I ovat liittofunktoreita.

Esimerkki 8.3 (ks. [7, s. 88])**.** Olkoon C kategoria, jossa on alkuobjekti. Olkoon G funktori muotoa $C \to \mathbf{1}$ ja $F\colon \mathbf{1} \to C$ sellainen funktori, että $F(0) = \emptyset$. Tällöin $\big|\mathrm{hom}\big(F(0), c\big)\big| = 1 = \big|\mathrm{hom}\big(0, G(c)\big)\big|$ kaikilla $c \in C$, joten on olemassa (yksikäsitteinen) bijektio $\phi(0, c)\colon \mathrm{hom}\big(F(0), c\big) \cong \mathrm{hom}\big(0, G(c)\big)$ kaikilla $c \in C$. Lisäksi edellisen esimerkin tapaan luonnollisuusehdon tulee olla näille bijektioille voimassa, koska $|\mathrm{hom}\big(0, G(c)\big)| = 1$ kaikilla $c \in C$.

Esimerkki 8.4 (ks. [58])**.** Muodostetaan käyttäen esitietojen alaluvun 2.4 merkintöjä kaksi funktoria $F\colon \mathbf{Pos} \to \mathbf{Top}$ ja $G\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Pos}$ siten, että $F(c, \leq) = (c, \tau_{\leq})$, $G(c, \tau) = (c, \leq_{\tau})$ ja $F(f) = f = G(f)$. Osoitetaan, että F ja G ovat liittofunktoreita.

Olkoon $c \in \mathbf{Pos}$ esijärjestetty joukko ja $d \in \mathbf{Top}$ topologinen avaruus. Osoitetaan ensiksi, että $\mathrm{hom}\big(F(c), d\big) = \mathrm{hom}\big(c, G(d)\big)$.

Olkoon $f\colon F(c) \to d$ jatkuva kuvaus. Olkoot $x, y \in c$ alkioita siten, että $x \leq y$. Siis jos $U \subseteq F(c)$ on avoin ja $x \in U$, niin $y \in U$; kääntäen jos $U \subseteq F(c)$ on suljettu ja $y \in U$, niin $x \in U$. Olkoon nyt $U \subseteq d$ sellainen suljettu joukko, että $f(y) \in U$. Tällöin $V = f^{-}1[U]$ on suljettu ja $y \in V$, joten $x \in V$, joten $f(x) \in U$. Siis $f(x)$ kuuluu kaikkiin suljettuihin joukkoihin, joihin $f(y)$ kuuluu; siispä $f(x) \in \mathrm{cl}(\{y\})$, joten esijärjestetyssä joukossa $G(d)$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Siis f on myös monotoninen kuvaus $c \to G(d)$.

Olkoon toisaalta $g\colon c \to G(d)$ monotoninen kuvaus. Olkoon $U \subseteq d$ avoin ja $V = f^{-1}[U]$. Jos $V = \emptyset$, niin V on avoin; oletetaan, että $V \neq \emptyset$, jolloin myös $U \neq \emptyset$. Olkoot $x \in V$, $y \in c$ alkioita siten, että $x \leq y$. Tällöin $f(x) \leq f(y)$, joten $f(x) \in \mathrm{cl}(\{f(y)\})$. Siis kaikilla suljetuilla $U' \subseteq d$ pätee, että jos $f(y) \in U'$, niin $f(x) \in U'$; kääntäen kaikilla avoimilla $U' \subseteq d$ pätee, että jos $f(x) \in U'$, niin $f(y) \in U'$. Erityisesti siis $f(y) \in U$. Siis $y \in V$. Siis V on avoin. Siis f on myös jatkuva kuvaus $F(c) \to d$.

Siis $\mathrm{hom}\big(F(c), d\big) = \mathrm{hom}\big(c, G(d)\big)$, missä c ja d ovat mielivaltaisia. Koska lisäksi $F(f) = f$ ja $G(f) = f$, niin on selvää, että luonnollisuusehto pätee kuvauksille

$\phi(c, d)\colon \hom\big(F(c), d\big) \to \hom\big(c, G(d)\big)$, $\phi(c, d)(f) = f$. Nämä kuvaukset siis muodostavat luonnollisen isomorfismin $\hom\big(F(-_1), -_2\big) \Rightarrow \hom\big(-_1, G(-_2)\big)$. Siis F ja G ovat todella liittofunktoreita.

Esimerkki 8.5. Olkoon $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ vapaa funktori ja $G\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ unohdusfunktori. Osoitetaan, että on olemassa liitos (F, G, ϕ).

Konstruoidaan tämä ϕ. Tämän tulee kuvata joukko S ja Abelin ryhmän H funktioksi $\hom\big(F(S), H\big) \to \hom\big(S, G(H)\big)$. Tämä funktio taas kuvaa ryhmähomomorfismin $f\colon F(S) \to H$ kuvaukseksi $S \to G(H)$. Viimein tämä kuvaus kuvaa alkion $s \in S$ joukon $G(H)$ alkioksi.

Jos $f\colon F(S) \to H$ on ryhmähomomorfismi, niin $f\restriction_S$ on kuvaus $S \to G(H)$, sillä $S \subseteq F(S)$ ja H on joukkona $G(H)$. Asetetaan siis

$$\phi(S, H)(f) = f\restriction_S$$

kaikilla $S \in \mathbf{Set}$, $H \in \mathbf{Ab}$, $f \in \hom(F(S), H)$ ja $s \in S$ ja tarkistetaan, että kyseessä on todella luonnollinen isomorfismi.

Jokainen kuvaus $\phi(S, H)(f)$ on bijektio, koska tunnetusti jokaisella funktiolla $g\colon S \to G(H)$ on yksikäsitteinen homomorfismi $h\colon F(S) \to H$, jolla $h\restriction_S = g$. Myös vaadittu luonnollisuusehto on voimassa, sillä

$$\begin{aligned}
\Big(\phi(S, H') \circ \hom\big(F(f), g\big)\Big)(h) &= \phi(S, H')\Big(\hom\big(F(f), g\big)(h)\Big) \\
&= \phi(S, H')\big(g \circ h \circ F(f)\big) \\
&= \big(g \circ h \circ F(f)\big)\restriction_S \\
&= g \circ (h\restriction_{S'}) \circ f \\
&= \hom\big(f, G(g)\big)(h\restriction_{S'}) \\
&= \hom\big(f, G(g)\big)\big(\phi(S', H)(h)\big) \\
&= \Big(\hom\big(f, G(g)\big) \circ \phi(S', H)\Big)(h)
\end{aligned}$$

kaikilla $f\colon S \to S'$, $g\colon H \to H'$ ja $h\colon F(S') \to H$. On siis havaittu, että (F, G, ϕ) on liitos.

Monilla muillakin unohdusfunktoreilla on vasempana liittofunktorina jokin funktori, jota tavanomaisesti kutsutaan vapaaksi funktoriksi. Toisaalta joillakin unohdusfunktoreilla on oikea liittofunktori, nk. kovapaa funktori. (Ks. [23])

8.2 Liittofunktorien perusominaisuuksia

Esitellään seuraavaksi muutama liittofunktorien perusominaisuus liittyen duaalisuuteen, isomorfiaan sekä rajojen ja korajojen säilymiseen.

Lause 8.1. *Olkoot $F\colon C \to D$, $G\colon D \to C$ funktoreita ja (F, G, ϕ) liitos. Tällöin $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \hat{\phi})$, missä $\hat{\phi}(d, c) = \phi^{-1}(c, d)$ kaikilla $c \in C$, $d \in D$, on liitos.*

Todistus. Kuvaukset $\hat{\phi}(d, c)$ ovat muotoa $\hom_C(c, G(d)) \to \hom_D(F(c), d)$ kaikilla $c \in C$ ja $d \in D$ ja ovat siten myös muotoa $\hom_{C^{\mathrm{op}}}(G^{\mathrm{op}}(d), c) \to \hom_{D^{\mathrm{op}}}(d, F^{\mathrm{op}}(c))$. Ne ovat myös isomorfismeja. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(d, c') \circ \hom_{C^{\mathrm{op}}}(G^{\mathrm{op}}(g), f) &= \phi^{-1}(c', d) \circ \hom_C(f, G(g)) \\
&= \hom_D(F(f), g) \circ \phi^{-1}(c, d') \\
&= \hom_{D^{\mathrm{op}}}(g, F^{\mathrm{op}}(f)) \circ \hat{\phi}(d, c')
\end{aligned}$$

kaikilla $c, c' \in C^{\mathrm{op}}$, $d, d' \in D^{\mathrm{op}}$, $f \colon c \to c'$ ja $g \colon d \to d'$, joten $\hat{\phi}$ on luonnollinen isomorfismi $\hom_{C^{\mathrm{op}}}(G^{\mathrm{op}}(-_1), -_2) \Rightarrow \hom_{D^{\mathrm{op}}}(-_1, F^{\mathrm{op}}(-_2))$. Siis $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \hat{\phi})$ on liitos. □

Lause 8.2 (ks. [7, s. 85], [11], [55])**.** *Olkoon (F, G, ϕ) liitos. Tällöin kolmikko (F, G', ϕ'), missä $\phi' \colon \hom\big(F(-_1), -_2\big) \Rightarrow \hom\big(-_1, G'(-_2)\big)$ on luonnollinen transformaatio, on liitos, jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varepsilon \colon G \Rightarrow G'$, jolla $\phi'(-_1, -_2) = \hom\big(-_1, \varepsilon(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2)$.*

Duaalisesti (F', G, ϕ') on liitos, jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varepsilon \colon F \Rightarrow F'$, jolla $\phi'(-_1, -_2) = \phi(-_1, -_2) \circ \hom\big(\varepsilon^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)$.

Todistus. Todistetaan ensimmäinen väite. Duaalinen väite seuraa tästä sekä lauseesta 8.1.

Kolmikko (F, G', ϕ') on liitos, jos ja vain jos $\phi' \circ \phi^{-1}$ on luonnollinen isomorfismi $\hom\big(-_1, G(-_2)\big) \Rightarrow \hom\big(-_1, G'(-_2)\big)$. Tämän kanssa on apulauseen 5.25 nojalla yhtäpitävää se, että on olemassa luonnollinen isomorfismi $\varepsilon \colon G \Rightarrow G'$, jolle on voimassa $\hom\big(-_1, \varepsilon(-_2)\big) = (\phi' \circ \phi^{-1})(-_1, -_2)$, eli $\phi'(-_1, -_2) = \hom\big(-_1, \varepsilon(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2)$. Toisaalta jos on voimassa $\hom\big(-_1, \varepsilon(-_2)\big) = \phi'(-_1, -_2) \circ \phi^{-1}(-_1, -_2)$, niin tunnetusti ε on yksikäsitteinen. Nämä havainnot yhdessä todistavat ensimmäisen väitteen. □

Lause 8.3. *Olkoot $F \colon C \to D$ ja $G \colon D \to C$ liittofunktoreita. Tällöin G säilyttää kaikki rajat. Duaalisesti F säilyttää kaikki korajat.*

Todistus (ks. [11], [56]). Osoitetaan ensiksi, että G säilyttää kaikki rajat. Olkoon (F, G, ϕ) liitos ja $H \colon J \to D$ funktori, jolla on raja $(\lim H, \varepsilon)$.

Koska yksipaikkaiset hom-funktorit säilyttävät kaikki rajat, niin $\hom\big(F(c), \lim H\big)$ varustettuna luonnollisella transformaatiolla $\hom\big(F(c), \varepsilon(-)\big)$ on kaikilla $c \in C$ funktorin $\hom\big(F(c), H(-)\big)$ raja. Koska taas $\phi\big(c, H(-)\big)$ on luonnollinen isomorfismi $\hom\big(F(c), H(-)\big) \Rightarrow \hom\big(c, (G \circ H)(-)\big)$, niin $\hom\big(F(c), \lim H\big)$ varustettuna luonnollisella transformaatiolla

$$\phi\big(c, H(-)\big) \circ \hom\big(F(c), \varepsilon(-)\big) = \hom\big(c, (G * \varepsilon)(-)\big) \circ \phi(c, \lim H)$$

on lauseen 6.5 nojalla kaikilla $c \in C$ funktorin $\hom\big(c, (G \circ H)(-)\big)$ raja. Edelleen

$$\phi(c, \lim H)\Big(\hom\big(F(c), \lim H\big)\Big) = \hom\big(c, G(\lim H)\big)$$

varustettuna luonnollisella transformaatiolla $\hom\big(c, (G * \varepsilon)(-)\big)$ on saman funktorin raja.

Olkoon nyt $I\colon J \to \mathbf{Set}^C$, $I(x) = \hom\big(-, (G \circ H)(x)\big)$, funktori ja $c \in C$ objekti. Olkoon $\epsilon\colon \Delta\big(\hom(-, c)\big) \Rightarrow I$ luonnollinen transformaatio. Tällöin edellisen perusteella on jokaisella $c' \in C$ yksikäsitteinen $f_{c'}\colon \hom(c', c) \to \hom\big(c', G(\lim H)\big)$, jolla $\epsilon(j)(c') = \hom\big(c', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \Delta(f_{c'})(j)$ kaikilla $j \in J$. Osoitetaan, että kuvaus $c' \mapsto f_{c'}$ on luonnollinen transformaatio $\hom(c', c) \to \hom\big(c', G(\lim H)\big)$.

Koska $\epsilon(j)$ on luonnollinen transformaatio $\hom(-, c) \Rightarrow \hom\big(-, (G \circ H)(j)\big)$, niin

$$
\begin{aligned}
&\hom\big(c', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \Delta\big(f_{c'} \circ \hom(g, c)\big)(j) \\
&= \hom\big(c', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \Delta(f_{c'})(j) \circ \hom(g, c) \\
&= \hom\big(g, (G \circ H)(j)\big) \circ \hom\big(c'', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \Delta(f_{c''})(j) \\
&= \hom\big(c', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \hom\big(g, G(\lim H)\big) \circ \Delta(f_{c''})(j) \\
&= \hom\big(c', (G * \varepsilon)(j)\big) \circ \Delta\Big(\hom\big(g, G(\lim H)\big) \circ f_{c''}\Big)(j)
\end{aligned}
$$

kaikilla $c', c'' \in C$, $g\colon c' \to c''$, ja rajan ominaisuuksien nojalla edelleen

$$
f_{c'} \circ \hom(g, c) = \hom\big(g, G(\lim H)\big) \circ f_{c''}.
$$

Siis $c' \mapsto f_{c'}$ on todella väitetynlainen luonnollinen transformaatio.

Olkoon nyt $\epsilon'\colon \Delta(c) \Rightarrow G \circ H$ luonnollinen transformaatio. Tällöin $\hom(-, \epsilon')$ on luonnollinen transformaatio $\Delta\big(\hom(-, c)\big) \Rightarrow \hom\big(-, (G \circ H)\big)$. Siis edellä havaitun sekä Yonedan lemman seurausten nojalla on olemassa yksikäsitteinen morfismi $f\colon c \to G(\lim H)$, jolla

$$
\hom(-, \epsilon') = \hom(-, G * \varepsilon) \circ \Delta(\hom(-, f)) = \hom(-, G * \varepsilon) \circ \hom(-, \Delta(f)).
$$

Edelleen Yonedan lemmasta seuraa, että $\epsilon' = (G * \varepsilon) \circ \Delta(f)$ ja että morfismin f mainitun yksikäsitteisyyden johdosta f on myös ainoa morfismi, jolla tämä yhtälö pätee. Siis $(G(\lim H), G * \varepsilon)$ on todella raja.

Lauseen 8.1 nojalla myös F^{op} säilyttää kaikki rajat, joten F säilyttää kaikki korajat.

□

8.3 Vaihtoehtoisia näkökulmia liittofunktoreihin

Liittofunktorit määriteltiin luvun alussa hom-joukkojen avulla. Tarkastellaan nyt kahta vaihtoehtoista liittofunktorien määritelmää sekä kaikkien näiden eri määritelmien suhdetta toisiinsa. Nämä määritelmät tullaan havaitsemaan ekvivalenteiksi, kun käsitellään lokaalisti pieniä kategorioita.

Lause 8.4 (ks. [11, 46])**.** *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita ja $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ funktoreita. Olkoot $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ luonnollisia transformaatioita, joilla $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{id}_F$ ja $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{id}_G$ ovat voimassa, eli kaaviot*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F\circ G\circ F \arrow[dr, Rightarrow, "\varepsilon * F"] & \\
F \arrow[ur, Rightarrow, "F*\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}_F"'] & & F
\end{tikzcd}
\quad ja \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & G\circ F\circ G \arrow[dr, Rightarrow, "G * \varepsilon"] & \\
G \arrow[ur, Rightarrow, "\eta*G"] \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}_G"'] & & G
\end{tikzcd}
$$

kommutoivat. Tällöin kolmikko (F, G, ϕ), missä $\phi(c, d)(h) = G(h) \circ \eta(c)$, on liitos. Toisaalta myös kolmikko (F, G, ϕ'^{-1}), missä $\phi'(c, d)(h) = \varepsilon(d) \circ F(h)$, on tämä sama liitos.

Todistus. Ensiksi havaitaan, että tämä ϕ on todella luonnollinen transformaatio $\hom\big(F(-_1), -_2\big) \Rightarrow \hom\big(-_1, G(-_2)\big)$, sillä

$$
\begin{aligned}
\Big(\phi(c, d') \circ \hom\big(F(f), g\big)\Big)(h) &= \phi(c, d')\big(g \circ h \circ F(f)\big) \\
&= G\big(g \circ h \circ F(f)\big) \circ \eta(c) \\
&= G(g) \circ G(h) \circ G\big(F(f)\big) \circ \eta(c) \\
&= G(g) \circ G(h) \circ \eta(c') \circ f \\
&= G(g) \circ \phi(c', d)(h) \circ f \\
&= \Big(\hom\big(f, G(g)\big) \circ \phi(c', d)\Big)(h)
\end{aligned}
$$

kaikilla $f : c \to c'$, $g : d \to d'$ ja $h : F(c') \to d$.

Samalla tavoin kuvaukset $\phi'(c, d)$, $\phi'(c, d)(g) = \varepsilon(d) \circ F(g)$, muodostavat luonnollisen transformaation $\hom\big(-_1, G(-_2)\big) \Rightarrow \hom\big(F(-_1), -_2\big)$. Koska

$$
\begin{aligned}
\big(\phi(c, d) \circ \phi'(c, d)\big)(g) &= G\big(\varepsilon(d) \circ F(g)\big) \circ \eta(c) \\
&= G\big(\varepsilon(d)\big) \circ G\big(F(g)\big) \circ \eta(c) \\
&= G\big(\varepsilon(d)\big) \circ \eta\big(G(d)\big) \circ g \\
&= \big((G * \varepsilon) \circ (\eta * G)\big)(d) \circ g \\
&= \mathrm{id}_G(d) \circ g \\
&= g
\end{aligned}
$$

kaikilla $g : c \to G(d)$, eli $\phi \circ \phi' = \mathrm{id}$, ja vastaavasti $\phi' \circ \phi = \mathrm{id}$, niin $\phi = \phi'^{-1}$ on luonnollinen isomorfismi. Siis $(F, G, \phi) = (F, G, \phi'^{-1})$ on liitos. □

Lause 8.5 (ks. [7, s. 82])**.** *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita, $F : C \to D$ ja $G : D \to C$ funktoreita ja olkoon (F, G, ϕ) liitos. Tällöin jokainen morfismi $\eta(c) : c \to (G \circ F)(c)$, $\eta(c) = \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})$, on universaalimorfismi objektista c funktoriin G ja kaikki nämä morfismit muodostavat yhdessä luonnollisen transformaation $\eta : \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$.*

Duaalisesti morfismit $\phi^{-1}\big(G(d), d\big)(\mathrm{id}_{G(d)})$ ovat universaalimorfismeja funktorista F objektiin d ja muodostavat luonnollisen transformaation $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$.

Todistus. Jokainen morfismi $\eta(c)$ on muotoa $c \to (G \circ F)(c)$, sillä $\phi\big(-_1, F(-_2)\big)$ on luonnollinen transformaatio $\hom\big(F(-_1), F(-_2)\big) \Rightarrow \hom\Big(-_1, G\big(F(-_2)\big)\Big)$. Tämä kuvaus η on myös luonnollinen, sillä

$$\begin{aligned}\eta(c')\circ f &= \phi\big(c', F(c')\big)(\mathrm{id}_{F(c')})\circ f\\ &= \phi\big(c, F(c')\big)\big(\,\mathrm{id}_{F(c')}\circ F(f)\big)\\ &= \phi\big(c, F(c')\big)\big(F(f)\circ \mathrm{id}_{F(c)}\,\big)\\ &= G\big(F(f)\big)\circ\phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})\\ &= G\big(F(f)\big)\circ\eta(c)\end{aligned}$$

kaikilla $f\colon c\to c'$.

Osoitetaan nyt, että jokainen komponentti $\eta(c)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin G. Olkoot $c\in C$ ja $d\in D$ objekteja ja $f\colon c\to G(d)$ morfismi. Tällöin $g=\phi^{-1}(c,d)(f)$ on morfismi muotoa $F(c)\to d$, ja

$$G(g)\circ\eta(c)=G(g)\circ\phi\big(c,F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})=\phi(c,d)(g)=\big(\phi(c,d)\circ\phi^{-1}(c,d)\big)(f)=f.$$

Lisäksi koska $\phi(c,d)$ on bijektio, ei voi olla morfismia $g'\colon F(c)\to d$, $g'\neq g$, jolla myös $G(g')\circ\eta(c)=f$. Siis $\eta(c)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin G.

Duaalinen tulos seuraa siitä, että $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \hat\phi)$, missä $\hat\phi(d,c)=\phi^{-1}(c,d)$ kaikilla $c\in C$, $d\in D$, on liitos. Siis lauseen alkuosan perusteella

$$\varepsilon(d)=\phi^{-1}\big(G(d),d\big)(\mathrm{id}_{G(d)})=\hat\phi\big(d,G^{\mathrm{op}}(d)\big)(\mathrm{id}_{G^{\mathrm{op}}(d)})$$

on universaalimorfismi objektista d funktoriin F^{op}, eli duaalisesti universaalimorfismi funktorista F objektiin d, kaikilla $d\in D$. Lisäksi kaikki morfismit $\varepsilon(d)$, $d\in D$, muodostavat luonnollisen transformaation $\mathrm{Id}_{D^{\mathrm{op}}}\Rightarrow F^{\mathrm{op}}\circ G^{\mathrm{op}}$, eli duaalisesti luonnollisen transformaation $F\circ G\Rightarrow \mathrm{Id}_D$. □

Lause 8.6 (ks. [7, s. 83])**.** *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita, $F\colon C\to D$ ja $G\colon D\to C$ funktoreita sekä $\eta\colon \mathrm{Id}_C\Rightarrow G\circ F$ sellainen luonnollinen transformaatio, että $\eta(c)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin G kaikilla $c\in C$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $\varepsilon\colon F\circ G\Rightarrow \mathrm{Id}_D$, jolle pätee, että $(G*\varepsilon)\circ(\eta*G)=\mathrm{id}_G$ ja $(\varepsilon*F)\circ(F*\eta)=\mathrm{id}_F$.*

Duaalisesti jos luonnollisen transformaation $\varepsilon\colon F\circ G\Rightarrow\mathrm{Id}_D$ jokainen komponentti $\varepsilon(d)$ on universaalimorfismi funktorista F objektiin d, niin on olemassa yksikäsitteinen luonnollinen transformaatio $\eta\colon\mathrm{Id}_C\Rightarrow G\circ F$, jolle edellä mainitut kaksi yhtälöä pätevät.

Todistus. Koska $\eta\big(G(d)\big)$ ovat universaalisia, kaikilla $d\in D$ on olemassa yksikäsitteinen $g_d\colon (F\circ G)(d)\to d$, jolla $G(g_d)\circ\eta\big(G(d)\big)=\mathrm{id}_{G(d)}$. Määritetään nyt, että $\varepsilon(d)=g_d$ kaikilla $d\in D$, ja osoitetaan, että kyseessä on luonnollinen transformaatio $F\circ G\Rightarrow\mathrm{Id}_D$. Koska nämä morfismit g_d, $d\in D$, olivat yksikäsitteisiä, ei voi olla toista luonnollista transformaatiota ε', jolla $(G*\varepsilon')\circ(\eta*G)=\mathrm{id}_G$.

Olkoon $g\colon d\to d'$ morfismi. Tällöin luonnollisuusehdon nojalla

$$(\eta*G)(d')\circ G(g)=(G\circ F\circ G)(g)\circ(\eta*G)(d).$$

Koska ε määritettiin siten, että $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{id}_G$, niin

$$\begin{aligned} G\big(\varepsilon(d')\big) \circ (G \circ F \circ G)(g) \circ (\eta * G)(d) &= \Big(G\big(\varepsilon(d')\big) \circ (\eta * G)(d')\Big) \circ G(g) \\ &= G(g) \\ &= G(g) \circ \Big(G\big(\varepsilon(d)\big) \circ (\eta * G)(d)\Big), \end{aligned}$$

ja edelleen koska komponentit $\eta(G(d))$ ovat universaalisia, saadaan edellisestä yhtäsuuruudesta tulos

$$\varepsilon(d') \circ (F \circ G)(g) = g \circ \varepsilon(d).$$

Siis ε on luonnollinen transformaatio $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$. Osoitetaan vielä, että on voimassa yhtäsuuruus $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{id}_F$.

Edellä havaitun perusteella $\big((G * \varepsilon) \circ (\eta * G)\big) * F = \mathrm{id}_{G \circ F}$. Toisaalta kuvauksen η luonnollisuuden nojalla

$$\begin{aligned} G\big(\mathrm{id}_F(c)\big) \circ \eta(c) &= G\Big(\varepsilon\big(F(c)\big)\Big) \circ \eta\Big(G\big(F(c)\big)\Big) \circ \eta(c) \\ &= G\Big(\varepsilon\big(F(c)\big)\Big) \circ G\Big(F\big(\eta(c)\big)\Big) \circ \eta(c) \\ &= G\Big(\big((\varepsilon * F) \circ (F * \eta)\big)(c)\Big) \circ \eta(c), \end{aligned}$$

ja edelleen sen komponenttien universaalisuuden vuoksi

$$\varepsilon\big(F(c)\big) \circ F\big(\eta(c)\big) = \mathrm{id}_{F(c)}\,.$$

Lauseen alkuosa on siis todistettu. Duaalinen loppuosa todistetaan soveltamalla alkuosaa luonnolliseen transformaatioon $\varepsilon^{\mathrm{op}}$. □

Edellisissä kolmessa lauseessa siis havaittiin, että jokainen liitos (F, G, ϕ) liittyy läheisesti tiettyihin luonnollisiin transformaatioihin $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ sekä $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$, joiden komponentit ovat universaalisia tai jotka täyttävät tietyt yhtälöt. Nimetään nämä luonnolliset transformaatiot ja yhtälöt.

Määritelmä 8.2 (ks. [7, s. 83])**.** Olkoot $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ funktoreita ja $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ luonnollinen transformaatio, jonka jokainen komponentti $\eta(c)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin G. Tällöin η on liitoksen $F \dashv G$ *yksikkö*. Luonnollinen transformaatio $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$, jonka jokainen komponentti $\varepsilon(d)$ on universaalimorfismi funktorista F objektiin d, on liitoksen $F \dashv G$ *koyksikkö*.

Edellä mainitut luonnolliset transformaatiot η ja ε nimettiin liitoksen $F \dashv G$ yksiköksi ja koyksiköksi, vaikka oletuksiin ei kuulunut, että F ja G ovat liittofunktoreita. Havaittiin jo, että liittofunktoreilla on aina yksikkö ja koyksikkö, mutta pian todetaan myös, että jos yksikkö tai koyksikkö on olemassa, niin F ja G todella ovat liittofunktoreita, mikäli C ja D ovat lokaalisti pieniä. Nimitykset ovat siksi sopivia.

Lause 8.7. *Yksikkö ja koyksikkö ovat duaalikäsitteitä: suoraan niiden määritelmien sekä tunnettujen duaalisuuksien nojalla η on liittofunktorien F ja G yksikkö, jos ja vain jos η^{op} on liittofunktorien G^{op} ja F^{op} koyksikkö.*

Määritelmä 8.3 (ks. [45])**.** Olkoot $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ funktoreita. Olkoot $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ luonnollisia transformaatioita. Tällöin yhtälöitä

$$(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{id}_G$$

ja

$$(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{id}_F$$

voidaan kutsua *kolmioyhtälöiksi*.

Funktorien F ja G määriteltiin olevan liittofunktoreita, jos on olemassa liitos (F, G, ϕ). Seuraava lause tarjoaa vaihtoehtoisia määritelmiä liittofunktoreille.

Lause 8.8 (ks. [7, s. 83])**.** *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita ja olkoot $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ funktoreita. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

- *On olemassa liitos (F, G, ϕ).*
- *On olemassa liitoksen $F \dashv G$ yksikkö η.*
- *On olemassa liitoksen $F \dashv G$ koyksikkö ε.*
- *On olemassa luonnolliset transformaatiot $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$, joille pätevät ehdot $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{Id}_G$ ja $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{Id}_F$.*

Lisäksi lauseissa 8.4, 8.5 ja 8.6 esitetyt keinot muuntaa liitoksia, yksiköitä, koyksiköitä ja kolmioyhtälöt täyttäviä luonnollisten transformaatioiden pareja toisikseen ovat kääntyviä. Erityisesti jos liitos muunnetaan joksikin muuksi näistä ja takaisin liitokseksi esitetyillä keinoilla, niin saadaan alkuperäinen liitos. Vastaava pätee myös yksiköille, koyksiköille ja kolmioyhtälöt täyttäville luonnollisille transformaatioille.

Todistus. Olemassaoloa koskeva väite seuraa suoraan mainituista lauseista: liitos voidaan muuntaa (ko)yksiköksi, (ko)yksikölle voidaan konstruoida sen kanssa kolmioyhtälöt toteuttava luonnollinen transformaatio ja viimein kolmiyhtälöt täyttävästä luonnollisten transformaatioiden parista saadaan liitos. Todistetaan vielä lauseen loppuosa.

Olkoon Φ niiden luonnollisten transformaatioiden ϕ joukko, joilla (F, G, ϕ) on liitos. Olkoon H liittofunktorien $F \dashv G$ yksiköiden joukko ja E liittofunktorien $F \dashv G$ koyksiköiden joukko. Olkoon vielä X niiden parien (η, ε) joukko, missä $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ ovat luonnollisia transformaatioita, joilla kolmioyhtälöt $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{id}_G$ ja $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{id}_F$ ovat voimassa. Tarkoitus on siis todistaa, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
& \Phi \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "8.5"'] \arrow[dr, "8.5"] & \\
H \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "8.6"'] & & E \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "8.6"] \\
& X \arrow[loop below, "\mathrm{id}"] \arrow[uu, "8.4"] &
\end{tikzcd}$$

kommutoi, missä nuolet ovat niihin merkittyjen lauseiden mukaisia kuvauksia näistä joukoista toisiinsa. Toisin sanoen nuoli 8.4 kuvaa parin (η, ε) luonnolliseksi transformaatioksi ϕ, missä

$$\phi(c, d)(h) = G(h) \circ \eta(c) = \varepsilon(d) \circ F(h),$$

nuolet 8.5 kuvaavat luonnollisen transformaation $\phi \in \Phi$ kaavion vasemmalla puolella yksiköksi $c \mapsto \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})$ ja oikealla koyksiköksi $d \mapsto \phi^{-1}\big(G(d), d\big)(\mathrm{id}_{G(d)})$ ja nuolet 8.6 kuvaavat yksikön $\eta \in H$ tai koyksikön $\varepsilon \in E$ siksi yksikäsitteiseksi pariksi $(\eta, \varepsilon) \in X$, jolla kolmioyhtälöt ovat voimassa.

Keskitytään käsittelemään vain edellä mainittuja kuvauksia ja niiden yhdisteitä. Käytetään edellä mainituille kuvauksille merkintää $A_1 \to A_2$, missä A_1 on kyseisen kuvauksen lähtöjoukko ja A_2 maalijoukko. Käytetään kuvausten $A_{n-1} \to A_n, \dots, A_1 \to A_2$ yhdisteelle merkintää $A_1 \to \cdots \to A_n$.

Ensiksi havaitaan, että jos pari $(\eta, \varepsilon) \in X$ kuvataan kuvauksella $X \to \Phi$ luonnolliseksi isomorfismiksi ϕ ja siitä edelleen kuvauksella $\Phi \to H$ yksiköksi η', niin

$$\eta'(c) = \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)}) = G(\mathrm{id}_{F(c)}) \circ \eta(c) = \eta(c)$$

kaikilla $c \in C$. Siis kuvaus $X \to \Phi \to H$ kuvaa tämän parin yksiköksi η. Vastaavasti kuvaus $X \to \Phi \to E$ kuvaa tämän parin koyksiköksi ε.

Kaikilla yksiköillä $\eta \in H$ on yksikäsitteinen pari $(\eta, \varepsilon) \in X$, joksi kuvaus $H \to X$ yksikön kuvaa. Siispä edellä havaitun nojalla kuvaus $X \to \Phi \to H \to X$ on identtinen kuvaus. Vastaavasti myös kuvaus $X \to \Phi \to E \to X$ on identtinen. Toisaalta selvästi myös kuvaukset $H \to X \to \Phi \to H$ ja $E \to X \to \Phi \to E$ ovat identtisiä.

Olkoon lopuksi $\phi \in \Phi$ luonnollinen transformaatio. Jos tämä kuvataan kuvauksella $\Phi \to H$ ensiksi yksiköksi η ja siitä kuvauksella $H \to X \to \Phi$ luonnolliseksi transformaatioksi $\phi' \in \Phi$, niin

$$\phi'(c, d)(h) = G(h) \circ \eta(c) = G(h) \circ \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_c) = \phi(c, d)(h)$$

kaikilla $c \in C$, $d \in D$ ja $h\colon F(c) \to d$. Siis yhdiste $\Phi \to H \to X \to \Phi$ on identtinen kuvaus. Vastaavasti havaitaan, että kuvaus $\Phi \to E \to X \to \Phi$ on myös identtinen.

Nyt on havaittu, että kaikki kaavion nuolista muodostettavat silmukat vastaavat identtisiä kuvauksia. Siispä kaavio kommutoi. □

Jatkossa voidaan siis sanoa, että funktorit lokaalisti pienten kategorioiden välillä ovat liittofunktoreita, jos niillä on yksikkö, koyksikkö tai kolmioyhtälöt toteuttava pari luonnollisia transformaatioita. Nämä vaihtoehtoiset määritelmät voitaisiin toki helposti yleistää myös kategorioihin, jotka eivät ole lokaalisti pieniä.

Esitetään vielä pari yksinkertaista seurausta edelliselle lauseelle.

Seuraus 8.9. *Lauseessa 8.6 funktorien F ja G sekä yksikön η määräämä luonnollinen transformaatio ε on koyksikkö; duaalisesti funktorit ja koyksikkö määräävät samalla tavalla yksikön. Jos kolmioyhtälöt ovat voimassa luonnollisille transformaatioille $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$, niin ε on yksikkö ja ϵ koyksikkö.*

Seuraus 8.10. *Jos* (F, G, ϕ) *on liitos, niin kolmioyhtälöt ovat voimassa yksikölle* $c \mapsto \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})$ *ja koyksikölle* $d \mapsto \phi^{-1}\big(G(d), d\big)(\mathrm{id}_{G(d)})$.

Lauseen 8.2 perusteella tiedetään, että kun $F \dashv G$, niin $F' \dashv G$, jos ja vain jos $F \cong F'$. Lisäksi jos (F, G, ϕ) ja (F', G, ϕ') ovat liitoksia, niin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $F \cong F'$, joka on "yhteensopiva" luonnollisten transformaatioiden ϕ ja ϕ' kanssa. Vastaava päti myös isomorfismeille $G \cong G'$. Tämä herättää kysymyksen: ovatko tällaiset isomorfismit jossakin mielessä "yhteensopivia" myös yksiköiden ja koyksiköiden kanssa?

Lause 8.11. *Olkoot* (F, G, ϕ) *ja* (F', G', ϕ') *liitoksia, missä* $F, F' \colon C \to D$ *sekä* $G, G' \colon D \to C$ *ovat funktoreita lokaalisti pienten kategorioiden välillä. Olkoon* $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$, $\eta(c) = \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})$ *liittofunktorien* F *ja* G *yksikkö sekä* $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$, $\varepsilon(d) = \phi^{-1}\big(G(d), d\big)(\mathrm{id}_{G(d)})$ *saman liitoksen koyksikkö. Olkoot* η' *ja* ε' *vastaavalla tavalla määritetyt liittofunktorien* F' *ja* G' *yksikkö ja koyksikkö. Olkoot vielä* $\lambda\colon F \Rightarrow F'$ *ja* $\mu\colon G \Rightarrow G'$ *luonnollisia isomorfismeja. Tällöin ehdot*

- $\phi'(-_1, -_2) = \mathrm{hom}\big(-_1, \mu(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2) \circ \mathrm{hom}\big(\lambda^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)$,
- $\eta' = (\mu * \lambda) \circ \eta$ *ja*
- $\varepsilon' = \varepsilon \circ (\lambda^{-1} * \mu^{-1})$

ovat yhtäpitäviä.

Todistus. Osoitetaan ensiksi, että ensimmäinen ja toinen ehto ovat yhtäpitäviä.

Oletetaan, että $\phi'(-_1, -_2) = \mathrm{hom}\big(-_1, \mu(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2) \circ \mathrm{hom}\big(\lambda^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\phi'\big(c, F'(c)\big)(\mathrm{id}_{F'(c)}) &= \mu\big(F'(c)\big) \circ \phi\big(c, F'(c)\big)\big(\,\mathrm{id}_{F'(c)} \circ \lambda(c)\big)\\ &= \mu\big(F'(c)\big) \circ G\big(\lambda(c)\big) \circ \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})\\ &= (\mu * \lambda)(c) \circ \phi\big(c, F(c)\big)(\mathrm{id}_{F(c)})\end{aligned}$$

kaikilla $c \in C$, eli $\eta' = (\mu * \lambda) \circ \eta$.

Oletetaan sitten, että $\eta' = (\mu * \lambda) \circ \eta$. Tällöin kaikilla $h\colon F'(c) \to d$ pätee

$$\begin{aligned}\phi'(c, d)(h) &= G'(h) \circ \eta'(c)\\ &= G'(h) \circ (\mu * \lambda)(c) \circ \eta(c)\\ &= G'(h) \circ \mu\big(F'(c)\big) \circ G\big(\lambda(c)\big) \circ \eta(c)\\ &= \mu(d) \circ G(h) \circ G\big(\lambda(c)\big) \circ \eta(c)\\ &= \mu(d) \circ G\big(h \circ \lambda(c)\big) \circ \eta(c)\\ &= \mu(d) \circ \phi(c, d)\big(h \circ \lambda(c)\big)\\ &= \Big(\mathrm{hom}\big(-_1, \mu(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2) \circ \mathrm{hom}\big(\lambda^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)\Big)(c, d)(h),\end{aligned}$$

joten $\phi'(-_1, -_2) = \mathrm{hom}\big(-_1, \mu(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2) \circ \mathrm{hom}\big(\lambda^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)$. Siis ensimmäinen ja toinen ehto ovat yhtäpitäviä.

Ehto $\phi'(-_1, -_2) = \hom\big(-_1, \mu(-_2)\big) \circ \phi(-_1, -_2) \circ \hom\big(\lambda^{\mathrm{op}}(-_1), -_2\big)$ on voimassa, jos ja vain jos $\phi'^{-1}(-_1, -_2) = \hom\big((\lambda^{\mathrm{op}})^{-1}(-_1), -_2\big) \circ \phi^{-1}(-_1, -_2) \circ \hom\big(-_1, \mu^{-1}(-_2)\big)$. Tämän perusteella ja duaalisesti jo todistetulle ekvivalenssille myös ensimmäinen ehto sekä ehto $\varepsilon' = \varepsilon \circ (\lambda * \mu)^{-1}$ ovat yhtäpitäviä. Koska $\lambda * \mu = (\lambda * G') \circ (F * \mu)$, niin

$$(\lambda * \mu)^{-1} = (F * \mu^{-1}) \circ (\lambda^{-1} * G') = \lambda^{-1} * \mu^{-1}.$$

Tällä perusteella ensimmäinen ja kolmas ehto ovat yhtäpitäviä. Siis kaikki kolme ehtoa ovat yhtäpitäviä. □

Lause 8.12. *Olkoot $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ liittofunktoreita ja $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ sellaisia luonnollisia transformaatioita, että kolmioyhtälöt ovat näille voimassa. Olkoot myös $F'\colon C \to D$, $F' \cong F$, ja $G'\colon D \to C$ liittofunktoreita. Olkoon $\eta'\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G' \circ F'$ yksikkö ja $\lambda\colon F \Rightarrow F'$ sekä $\mu\colon G \Rightarrow G'$ luonnollisia isomorfismeja, joille pätee $\eta' = (\mu * \lambda) \circ \eta$. Tällöin kolmioyhtälöt pätevät funktoreille F' ja G' sekä luonnollisille transformaatioille η' ja $\varepsilon' = \varepsilon \circ (\lambda^{-1} * \mu^{-1})$.*

Todistus. Koska kolmioyhtälöt pätevät luonnollisille transformaatioille η ja ε, niin ne saadaan samasta liitoksesta (F, G, ϕ) lauseen 8.8 kuvauksilla. Myös η' saadaan jostakin liitoksesta (F', G', ϕ'), ja edellisen lauseen nojalla ε' saadaan myös tästä liitoksesta. Tämän seurauksena kolmioyhtälöt pätevät luonnollisille transformaatioille η' ja ε'. □

Tästäkään näkökulmasta ei siis ole väliä, määritelläänkö liittofunktorit käyttäen hom-funktoreita, yksiköitä ja koyksiköitä tai kolmioyhtälöitä – jos F ja G ovat liittofunktoreita, niin kumpikin niistä on jokaisen kolmen määritelmän mukaan yksikäsitteistä isomorfiaa vaille yksikäsitteisiä, ja tämä isomorfia määräytyy kaikissa tapauksissa samalla tavalla.

On hyödyllistä tuntea kaikki nämä vaihtoehtoiset määritelmät, koska jokainen niistä (sekä joitakin muitakin määritelmiä, ks. [11]) esiintyy alan kirjallisuudessa. Jokainen niistä tarjoaa myös omat näkökulmansa ja omat työkalunsa liittofunktorien käsittelyyn, mikä havaitaan seuraavassa alaluvussa ja sitä ennen myös seuraavassa lauseessa, joka mahdollistaa vasemman liittofunktorin konstruoinnin oikeasta liittofunktorista ja yksiköstä. Tämän duaalilauseella voidaan tietysti konstruoida vasemmasta liittofunktorista ja koyksiköstä oikea liittofunktori.

Lause 8.13 ([7, s. 83])**.** *Olkoot C, D lokaalisti pieniä kategorioita, $G\colon D \to C$ funktori ja $\eta\colon \mathrm{Ob}_C \to \mathrm{Mor}_D$ sellainen kuvaus, että $\eta(c)$ on universaalimorfismi objektista c funktoriin G kaikilla $c \in C$. Tällöin on olemassa sellainen funktori $F\colon C \to D$, että F ja G ovat liittofunktoreita ja η on niiden yksikkö.*

Todistus. Konstruoidaan F seuraavasti. Universaalisuuden nojalla kaikilla $c \in C$ on jokin $d_c \in D$, jolla $\eta(c)$ on muotoa $c \to G(d_c)$. Asetetaan $F(c) = d_c$ kaikilla $c \in C$. Kaikilla $c, c' \in C$ ja $f\colon c \to c'$ on $\eta(c') \circ f$ morfismi $c \to G\big(F(c')\big)$, ja morfismin $\eta(c)$ universaalisuuden nojalla on kaikille f tällöin olemassa yksikäsitteinen morfismi $g_f\colon F(c) \to F(c')$, jolla $\eta(c') \circ f = G(g_f) \circ \eta(c)$. Asetetaan $F(f) = g_f$ kaikilla $f \in C$.

Mainitusta yksikäsitteisyydestä johtuen kaikilla $c \in C$ on väistämättä voimassa $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$. Samoin yksikäsitteisyyden nojalla $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ kaikilla $c, c', c'' \in C$ ja $f : c \to c'$, $f' : c' \to c''$, sillä

$$G\big(F(f' \circ f)\big) \circ \eta(c) = \eta(c'') \circ (f' \circ f) = G\big(F(f')\big) \circ \eta(c') \circ f = G\big(F(f') \circ F(f)\big) \circ \eta(c).$$

Siispä F on todella funktori. Se konstruoitiin siten, että η on luonnollinen transformaatio $\mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$. Lisäksi oletusten mukaan $\eta(c)$ on universaalinen kaikilla $c \in C$, joten η on yksikkö. Siis F ja G ovat liittofunktoreita. □

8.4 Lisäesimerkkejä liittofunktoreista

Kolmioyhtälöt sekä liittofunktorien yksikkö ja koyksikkö valaisevat kenties hieman hom-funktoreita käyttävää määritelmää selkeämmin liittofunktorien luonnetta. Myös lisäesimerkit auttanevat ymmärtämään liittofunktoreita. Esitellään siksi nyt lisää esimerkkejä liittofunktoreista ja havainnollistetaan samalla edellä esiteltyjen vaihtoehtoisten määritelmien käyttöä funktoriparien todistamisessa liittofunktoreiksi.

Lause 8.14. *Olkoot C ja D lokaalisti pieniä kategorioita. Olkoot $F\colon C \to D$ ja $G\colon D \to C$ toisiaan vastaavia ekvivalenssifunktoreita. Toisin sanoen olkoot ne sellaisia funktoreita, että $G \circ F \cong \mathrm{Id}_C$ ja $F \circ G \cong \mathrm{Id}_D$. Tällöin ne ovat liittofunktoreita.*

Todistus (ks. [10]). On siis olemassa luonnolliset isomorfismit $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$. Kolmioyhtälöt eivät kuitenkaan välttämättä päde näille, sillä jos toinen näistä isomorfismeista kiinnitetään, voidaan toinen edelleen valita vapaasti; toisaalta kolmioyhtälön tiedetään aina määräävän jäljelle jäävän isomorfismin yksikäsitteisesti.

Määritellään tämän vuoksi luonnollinen isomorfismi $\varepsilon'\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ siten, että $\varepsilon' = \varepsilon \circ (F * \eta^{-1} * G) \circ \big((F \circ G) * \varepsilon^{-1}\big)$. Tämä on vaadittua muotoa oleva luonnollinen transformaatio. Lisäksi Godementin tulon tunnettujen ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}
(\varepsilon' * F) \circ (F * \eta) &= (\varepsilon * F) \circ \big(F * \eta^{-1} * (G \circ F)\big) \circ \big((F \circ G) * \varepsilon^{-1} * F\big) \circ (F * \eta) \\
&= (\varepsilon * F) \circ \big((F \circ G \circ F) * \eta^{-1}\big) \circ \big(\varepsilon^{-1} * (F \circ G \circ F)\big) \circ (F * \eta) \\
&= (\varepsilon * F) \circ \big((F \circ G \circ F) * \eta^{-1}\big) \circ \big((F \circ G \circ F) * \eta\big) \circ (\varepsilon^{-1} * F) \\
&= (\varepsilon * F) \circ (\varepsilon^{-1} * F) \\
&= \mathrm{id}_F
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(G * \varepsilon') \circ (\eta * G) &= (G * \varepsilon) \circ \big((G \circ F) * \eta^{-1} * G\big) \circ \big((G \circ F \circ G) * \varepsilon^{-1}\big) \circ (\eta * G) \\
&= (G * \varepsilon) \circ \big(\eta^{-1} * (G \circ F \circ G)\big) \circ \big((G \circ F \circ G) * \varepsilon^{-1}\big) \circ (\eta * G) \\
&= (G * \varepsilon) \circ \big(\eta^{-1} * (G \circ F \circ G)\big) \circ \big(\eta * (G \circ F \circ G)\big) \circ (G * \varepsilon^{-1}) \\
&= (G * \varepsilon) \circ (G * \varepsilon^{-1}) \\
&= \mathrm{id}_G,
\end{aligned}$$

joten kolmioyhtälöt pätevät luonnollisille isomorfismeille $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ sekä $\varepsilon'\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_D$. Siis F ja G ovat liittofunktoreita. □

Lause 8.15 (ks. [57], [7, s. 88]). *Olkoot C ja J sellaisia kategorioita, että C ja C^J ovat lokaalisti pieniä ja kaikilla funktoreilla $J \to C$ on raja. Olkoon $G = \lim\colon C^J \to C$ (jokin) rajafunktori ja $F = \Delta\colon C \to C^J$ diagonaalifunktori. Tällöin F ja G ovat liittofunktoreita.*

Duaalisesti jos H on korajafunktori ja F vastaava diagonaalifunktori, niin H ja F ovat liittofunktoreita.

Todistus. Rajafunktori määriteltiin lauseessa 6.12 siten, että jos valittua funktorin $H \in C^J$ rajaa merkitään $(\lim H, \varepsilon_H)$, niin $\varepsilon_{H'} \circ F\big(G(f)\big) = f \circ \varepsilon_H$ kaikilla $H, H' \in C^J$ ja $f\colon H \Rightarrow H'$. Siispä kuvaus $H \mapsto \varepsilon_H$ on luonnollinen transformaatio $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{C^J}$. Lisäksi rajan määritelmän nojalla ε_H on universaalimorfismi funktorista F objektiin H kaikilla $H \in C^J$. Nyt kuvaus $H \mapsto \varepsilon_H$ on havaittu liitoksen $F \dashv G$ koyksiköksi. □

Vielä edellistä esimerkkiä tarkentaen voidaan mainita, että esimerkiksi diagonaalifunktorille $\Delta\colon$ **Set** $\to$ **Set** $\times$ **Set**, karteesiselle tulolle $\times\colon$ **Set** $\times$ **Set** $\to$ **Set** sekä erilliselle yhdisteelle $+\colon$ **Set** $\times$ **Set** $\to$ **Set** pätevät $\Delta \dashv \times$ ja $+ \dashv \Delta$ (ks. [7, s. 87]).

Esimerkki 8.6 (ks. [51, s. 13], [71]). Olkoon $F\colon$ **Top** $\to$ **Set** unohdusfunktori, joka siis kuvaa jokaisen avaruuden X sen pisteiden joukoksi ja jokaisen jatkuvan kuvauksen f kuvaukseksi f. Olkoot lisäksi $T, D\colon$ **Set** $\to$ **Top** sellaisia funktoreita, että $T(X)$ on joukko X varustettuna triviaalilla topologialla, $D(X)$ on joukko X varustettuna diskreetillä topologialla ja $T(f) = D(f) = f$ kaikilla kuvauksilla f. Koska $T(f)$ on kuvaus triviaaliin topologiaan ja $D(f)$ kuvaus diskreetistä topologiasta, nämä kuvaukset ovat todella jatkuvia.

Nyt $F \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$. Siispä ε, $\varepsilon(s) = \mathrm{id}_s$, on luonnollinen isomorfismi $F \circ T \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$. Olkoon $f\colon T(s) \to t$ jatkuva kuvaus. Tällöin $F(f)$ on kuvaus $F\big(T(s)\big) \to F(t)$, eli $s \to F(t)$. Siispä on olemassa kuvaus $g\colon s \to F(t)$, jolla $\varepsilon(s) \circ T(g) = f$, nimittäin $g = F(f)$, ja tämä kuvaus on selvästi yksikäsitteinen. Täten F ja T ovat liittofunktoreita, sillä ε on niiden koyksikkö.

Toisaalta $F \circ D = \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$, joten ε on myös luonnollinen isomorfismi $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow F \circ D$. Olkoon nyt $f\colon s \to F(t)$ kuvaus. Tällöin $D(f)$ on jatkuva kuvaus $D(s) \to t$. On siis olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $g\colon D(s) \to t$, jolla $F(g) \circ \varepsilon(s) = f$, nimittäin $g = D(f)$. Siis D ja F ovat liittofunktoreita, sillä ε on niiden yksikkö.

Esimerkki 8.7 (ks. [61]). Olkoon s joukko. Määritetään kaikilla joukoilla x, y kuvaus $\phi(x, y)\colon \hom(x \times s, y) \to \hom\big(x, \hom(s, y)\big)$ siten, että $\phi(x, y)(f)(a)(t) = f(a, t)$ kaikilla kuvauksilla $f\colon x \times s \to y$ ja alkioilla $a \in x$, $t \in s$. Tällöin $\phi(x, y)$ on bijektio, sillä sen käänteiskuvaus on $\phi^{-1}(x, y)$, $\phi^{-1}(x, y)(f)(a, t) = f(a)(t)$, kaikilla joukoilla x, y. Lisäksi

$$
\begin{aligned}
\big(\phi(x, y') \circ \hom(f \times s, g)\big)(h)(a)(t) &= \phi(x, y')\big(g \circ h \circ (f, \mathrm{id})\big)(a)(t) \\
&= g\Big(h\big(f(a), t\big)\Big) \\
&= \Big(g \circ h\big(f(a), -\big)\Big)(t) \\
&= \big(\hom(s, g) \circ \phi(x', y)(h) \circ f\big)(a)(t) \\
&= \Big(\hom\big(f, \hom(s, g)\big) \circ \phi(x', y)\Big)(h)(a)(t)
\end{aligned}
$$

kaikilla joukoilla x, x', y, y', kuvauksilla $f\colon x \to x', g\colon y \to y', h\colon x' \times s \to y$ ja alkioilla $a \in x, t \in s$. Siis ϕ on luonnollinen isomorfismi ja $- \times s\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ sekä $\hom(s, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ovat liittofunktoreita.

Esimerkki 8.8. Tarkastellaan esijärjestysten kategoriaa **Pre** ja osittainjärjestysten kategoriaa **Pos**. Konstruoidaan aluksi funktori $F\colon \mathbf{Pre} \to \mathbf{Pos}$. Olkoon $(s, \leq)$ mielivaltainen esijärjestys. Tällöin relaatio $\sim \in \mathcal{P}(s \times s)$, $a \sim b \iff a \leq b \wedge b \leq a$, on ekvivalenssi ja relaatio $\leq_\sim \in \mathcal{P}(s/{\sim} \times s/{\sim})$, $[a] \leq_\sim [b] \iff a \leq b$, on hyvinmääritelty ja osittainjärjestys. Asetetaan tällöin $F(s, \leq) = (s/{\sim}, \leq_\sim)$.

Olkoot nyt s_1, s_2 mielivaltaisia esijärjestyksiä ja $f\colon s_1 \to s_2$ mielivaltainen monotoninen kuvaus. Määritetään, että $F(f)\colon F(s_1) \to F(s_2)$ on tällöin tunnetusti hyvinmääritelty ja monotoninen kuvaus $[x] \mapsto [f(x)]$. Koska $F(\mathrm{id})([x]) = [\mathrm{id}(x)] = [x]$ ja $F(f \circ g)([x]) = \big[f\big(g(x)\big)\big] = F(f)([g(x)]) = \big(F(f) \circ F(g)\big)([x])$, on F todella funktori.

Olkoon vielä $G\colon \mathbf{Pos} \to \mathbf{Pre}$ kanoninen upotus. Määritetään luonnolliset transformaatiot $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{Pre}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Pos}}$ siten, että $\eta(s)(x) = [x]$ ja $\varepsilon(s)([x]) = x$. Koska osittainjärjestyksessä $a \sim b$, jos ja vain jos $a = b$, niin $\varepsilon(s)$ on hyvinmääritelty kaikilla $s \in \mathbf{Pos}$. Selvästi molempien luonnollisten transformaatioiden komponentit ovat monotonisia. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\big(\eta(s') \circ f\big)(x) &= \eta(s')\big(f(x)\big)\\
&= [f(x)]\\
&= F(f)([x])\\
&= \big((G \circ F)(f) \circ \eta(s)\big)(x)
\end{aligned}$$

kaikilla $s, s' \in \mathbf{Pre}$, $f\colon s \to s'$ ja $x \in s$ ja

$$\begin{aligned}
\big(\varepsilon(s') \circ (F \circ G)(f)\big)([x]) &= \varepsilon(s')([f(x)])\\
&= f(x)\\
&= \big(f \circ \varepsilon(s)\big)([x])
\end{aligned}$$

kaikilla $s, s' \in \mathbf{Pos}$, $f\colon s \to s'$ ja $[x] \in (F \circ G)(s)$, joten η ja ε ovat todella luonnollisia transformaatioita.

Nämä F ja G ovat liittofunktoreita, sillä kaikilla $s \in \mathbf{Pos}$ ja $x \in G(s)$ pätee

$$\big((G * \varepsilon) \circ (\eta * G)\big)(s)(x) = (G * \varepsilon)(s)([x]) = x$$

ja kaikilla $s \in \mathbf{Pre}$ ja $x \in s$ pätee

$$\begin{aligned}
\big((\varepsilon * F) \circ (F * \eta)\big)(s)([x]) &= \varepsilon\big(F(s)\big)\Big(F\big(\eta(s)\big)([x])\Big)\\
&= \varepsilon\big(F(s)\big)\big([\eta(s)(x)]\big)\\
&= \varepsilon\big(F(s)\big)\big(\big[[x]\big]\big)\\
&= [x],
\end{aligned}$$

eli kolmioyhtälöt $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pos}}$ ja $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pre}}$ ovat voimassa.

Määritellään seuraavaa esimerkkiä varten kaksi kategorian **Rng** alikategoriaa. Ensimmäinen on se täysi alikategoria **Fld**, johon kuuluvat täsmälleen kaikki kunnat. Toinen alikategoria, $\mathbf{Dom}_m$, on se, johon kuuluvat täsmälleen kokonaisalueet ja näiden väliset monomorfismit (ks. [7, s. 56]). Tiedetään, että jos $f\colon c \to d$ on rengashomomorfismi kuntien välillä, niin se on injektio. Siispä myös **Fld** sisältää vain monomorfismeja ollen siten kategorian $\mathbf{Dom}_m$ alikategoria.

Esimerkki 8.9 (ks. [7, s. 87])**.** Olkoon $G\colon\ \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$ kuntien upotus kokonaisalueisiin. Olkoon $F\colon\ \mathbf{Dom}_m \to \mathbf{Fld}$ sellainen funktori, että $F(c)$ on kokonaisalueen c jakokunta kaikilla $c \in \mathbf{Dom}_m$ ja $F(f)$ on kaikilla $f \in \mathbf{Dom}_m$, $f\colon c \to c'$, se yksikäsitteinen rengashomomorfismi $F(c) \to F(c')$, jolla $F(f)([x]) = [f(x)]$ kaikilla $x \in c$. Käyttämällä mainittua yksikäsitteisyysominaisuutta on helppo havaita, että $F(\mathrm{id}_c)$ on väistämättä $\mathrm{id}_{F(c)}$ kaikilla $c \in \mathbf{Dom}_m$ ja $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ kaikilla $f, g \in \mathbf{Dom}_m$, joilla yhdiste $f \circ g$ on olemassa. Siis F on todella funktori.

Tunnetusti kunnan c jakokunta $F\big(G(c)\big)$ on isomorfinen kunnan c kanssa, ja tällainen isomorfia saadaan kuvaamalla jokainen jakokunnan ekvivalenssiluokka $[x] \in F\big(G(c)\big)$ vastaavaksi kunnan c alkioksi x. Olkoon nyt $\varepsilon\colon\ F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Fld}}$ tällaisten isomorfioiden muodostama luonnollinen transformaatio. Luonnollisuusehto on tälle voimassa, sillä

$$\begin{aligned}
\big(\varepsilon(c') \circ (F \circ G)(f)\big)([x]) &= \varepsilon(c')\big([f(x)]\big) \\
&= f(x) \\
&= (f \circ \varepsilon(c))([x])
\end{aligned}$$

kaikilla $c, c' \in \mathbf{Fld}$, $f\colon c \to c'$ ja $x \in c$.

Olkoon c kunta, d kokonaisalue ja $f\colon\ F(d) \to c$ rengashomomorfismi. Olkoon $f'\colon\ d \to G(c)$, $f' = G(f) \circ \epsilon_d$, morfismi, missä $\epsilon_d\colon\ d \to G\big(F(d)\big)$, on kanoninen upotus jakokuntaan. Tällöin

$$\varepsilon(c) \circ F(f') = \varepsilon(c) \circ F\big(G(f) \circ \epsilon_d\big) = f \circ \varepsilon\big(F(d)\big) \circ F(\epsilon_d) = f,$$

sillä $F(\epsilon_d)$ on isomorfismi $F(d) \to (F \circ G \circ F)(d)$, joka kuvaa jokaisen jakokunnan alkion $x \in F(d)$ vastaavaksi ekvivalenssiluokaksi $[x]$. Tiedetään myös, että $\varepsilon(c)$ on isomorfismi ja että F ei kuvaa kahta eri morfismia samaksi morfismiksi, joten f' on ainoa morfismi, jolla $f = \varepsilon(c) \circ F(f')$. Siis $\varepsilon(c)$ on universaalimorfismi funktorista F objektiin c. Siis F ja G ovat liittofunktoreita, sillä ε on niiden koyksikkö.

Esimerkki 8.10. Olkoon $G\colon\ \mathbf{Fld} \Rightarrow \mathbf{Set}$ unohdusfunktori. Onko G jonkin funktorin $F\colon\ \mathbf{Set} \Rightarrow \mathbf{Fld}$ oikea liittofunktori?

Oletetaan, että on. Tällöin F säilyttää kaikki korajat. Erityisesti se säilyttää tyhjän korajan eli alkuobjektin $\emptyset$. Siispä myös kategoriassa **Fld** on alkuobjekti. Koska kategorian **Fld** morfismit ovat injektioita, niin kategorian **Fld** alkuobjektin on oltava alkioiden määrältään pienin kunta, eli $\mathbb{Z}_2$. Tämä on ristiriita, koska ei ole rengashomomorfismia $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3$. Ei siis ole olemassa liitosta $F \vdash G$, missä G on mainittu unohdusfunktori.

8.5 Liittofunktorien merkitys

Koska yksikön ja koyksikön komponentit ovat universaalisia, voidaan luvussa 6 käsiteltyjä näkökulmia universaalimorfismeihin soveltaa myös liittofunktoreihin. Liittofunktorit voidaan siis mieltää toistensa approksimaatioiksi. Toisaalta liitoksen $F \dashv G$ vasemman liittofunktorin $F\colon C \to D$ voi ajatella olevan optimaalisin ratkaisu funktorin G ilmaisemaan ongelmaan. Universaalimorfismi objektista $c \in C$ funktoriin G antaa yhden ratkaisun tällaiseen ongelmaan; koska F ja yksikkö $\mathrm{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ on määritelty kaikille objekteille $c \in C$, ne antavat ratkaisut tällaiseen ongelmaan kaikilla $c \in C$. Esimerkiksi siis unohdusfunktorin $G\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ avulla voidaan ilmaista ongelma, jossa haetaan jollekin joukolle c sellaista Abelin ryhmää d, että c voidaan upottaa joukkoon $G(d)$ universaalisella tavalla. Vapaa funktori $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ antaa tämän objektin $d = F(c)$ ja yksikkö ε tämän upotuksen $\varepsilon(c)\colon c \to G\big(F(c)\big)$ kaikilla $c \in C$. (Ks. [57], [54])

Näissä näkökulmissa on tosin sama ongelma, joka havaittiin luvussa 6: koska ”pienuudella” ja ”suuruudella” ei välttämättä ole käsiteltävässä kategoriassa aina kovin intuitiivista merkitystä, voi olla vaikea hahmottaa, missä mielessä liittofunktorit approksimoivat toisiaan tai mitä optimaalisuus tai monimutkaisuus milloinkin merkitsevät.

Toisaalta liittofunktoreiden voi usein ajatella olevan toistensa käsitteellisiä vastakohtia (ks. [8]). Tätä näkökulmaa voidaan havainnollistaa esimerkiksi jakokuntafunktorilla $\mathbf{Dom}_m \to \mathbf{Fld}$, joka laajentaa kokonaisalueen intuitiivisesti suoraviivaisimmalla tavalla kunnaksi, ja sen liittofunktorilla, joka taas kuvaa kunnan suoraviivaisesti kokonaisalueeksi.

Joka tapauksessa on havaittu, että liittofunktoreita löytyy hyvin monilta matematiikan aloilta. Löydetyt esimerkit liittofunktoreista eivät olleet kovin abstrakteja ja keinotekoisia, vaan päinvastoin hyvin intuitiivisia ja monet niistä tunnetaan laajalti. Esimerkiksi vapaat Abelin ryhmät olivat lukijalle todennäköisesti jo tuttuja. Niitä koskeva esimerkki voidaan helposti yleistää koskemaan vapaita R-moduleja, missä R voi olla mikä tahansa rengas. Kun R kiinnitetään, tällä tavoin saatu vapaa funktori $F\colon \mathbf{Set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ ja unohdusfunktori $G\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ voidaan jälleen helposti havaita liittofunktoreiksi (ks. [7, s. 87]). Vapaat modulit ovat tunnetusti hyödyllisiä esimerkiksi tensori- ja ulkotuloavaruuksien sekä simpleksisen homologian kannalta, ja on siksi hyödyllistä tuntea niiden ominaisuudet tarkasti.

Myös Galois'n vastaavuudet esiintyvät monissa asiayhteyksissä sitä koskevassa esimerkissä mainittujen lisäksi, muun muassa kuntalaajennoksia käsiteltäessä. Raja- ja diagonaalifunktoria koskeva esimerkki on relevantti hyvin monilla matematiikan aloilla, sillä monista matemaattisista struktuureista voidaan muodostaa esimerkiksi tuloja ja/tai kotuloja.

Kuten johdannossa mainittiin, kategoriateoria on erityisen hyödyllinen algebrallisen topologian, algebrallisen geometrian ja (kategorisen) logiikan kannalta. Koska tutkielma ei kuitenkaan koske suoraan näitä aihepiirejä ja erityisesti kaksi ensimmäistä niistä ovat lukijalta edellytettyihin esitietoihin verrattuna jokseenkin mutkikkaita, tätä seikkaa ei valaistu muilla esimerkeillä kuin varistoja koskevalla esimerkillä.

Funktoreita $- \times s, \hom(s, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ koskeva esimerkki liittyy keskeisesti funktionaalisesta ohjelmoinnista tuttuun käsitteeseen "currying" (ks. [61]). Muun muassa Haskell-ohjelmointikielen (jonka tyyppijärjestelmä ja käsitteistö pohjautuvat jossain määrin kategoriateoriaan, ks. [5]) käyttäjille lienevät tuttuja funktiot `curry` ja `uncurry`, jotka ovat verrattavissa aiemmin esitettyyn luonnolliseen isomorfismiin $- \times s \Rightarrow \mathrm{hom}(s, -)$ ja tämän käänteismorfismiin. Toisena esimerkkinä tietojenkäsittelytieteestä kategorioita on myös ehdotettu korvaamaan relaatiot tietokantajärjestelmien keskeisenä käsitteenä. Eräässä tällaisessa lähestymistavassa voidaan määritellä join- ja union-operaatiot projektio-operaation liittofunktoreina (ks. [52]).

Koska liittofunktoreita todella esiintyy näin monilla aloilla, on mielekästä erottaa ne omaksi käsitteekseen ja tarkastella niitä.

Lähteet

[1] Adámek, Jiří, Herrlich, Horst ja Strecker, George E., *Abstract and Concrete Categories* [verkkodokumentti], 2004 [viitattu 13.8.2017], URL http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf

[2] Categorical Informatics, aloitussivu [online], 2016 [viitattu 22.12.2016], URL http://catinf.com/index.php

[3] Eilenberg, Samuel ja Mac Lane, Saunders, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945) 231–294.

[4] Feferman, Solomon, *Categorical Foundations and Foundations of Category Theory*, osana teosta *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory, Vol. 1.* (s. 149–169), Dordrecht, 1977, ISBN 978-94-010-1140-2, saatavilla: https://math.stanford.edu/~feferman/papers/Cat_founds.pdf

[5] HaskellWiki, *Hask* [online], 2012 [viitattu 26.10.2015], URL https://wiki.haskell.org/Hask

[6] Lawvere, F. William, *An Elementary Theory of the Category of Sets*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 52 (1965) 1506–1511, saatavilla: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300477/pdf/pnas00186-0196.pdf

[7] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Ann Arbor, 1998, ISBN 0-387-98403-8, saatavilla: http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/maclanecat.pdf

[8] Marquis, Jean-Pierre, *Category theory* [verkkojulkaisu], The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2015 edition), https://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/category-theory/

[9] *n*Lab, aloitussivu [online], 2015 [viitattu 26.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage

[10] *n*Lab, *Adjoint equivalence* [online], 2015 [viitattu 16.3.2017], URL https://ncatlab.org/nlab/show/adjoint+equivalence

[11] *n*Lab, *Adjoint functor* [online], 2016 [viitattu 21.5.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/adjoint+functor

[12] *n*Lab, *Category* [online], 2014 [viitattu 30.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/category

[13] *n*Lab, *Cat* [online], 2014 [viitattu 5.7.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Cat

[14] *n*Lab, *Constant functor* [online], 2013 [viitattu 30.1.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/constant+functor

[15] *n*Lab, *Contravariant functor* [online], 2014 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/contravariant+functor

[16] *n*Lab, *Coproduct* [online], 2015 [viitattu 27.3.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/coproduct

[17] *n*Lab, *Diagonal functor* [online], 2011 [viitattu 30.1.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/diagonal+functor

[18] *n*Lab, *Elementary Theory of the Category of Sets* [online], 2015 [viitattu 30.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/ETCS

[19] *n*Lab, *Endomorphism* [online], 2014 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/endomorphism

[20] *n*Lab, *Epimorphism* [online], 2015 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/epimorphism

[21] *n*Lab, *Equivalence of categories* [online], 2016 [viitattu 5.7.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/equivalence+of+categories

[22] *n*Lab, *Finite categories* [online], 2014 [viitattu 28.3.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/finite+category

[23] *n*Lab, *Free functor* [online], 2014 [viitattu 2.3.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/free+functor

[24] *n*Lab, *Functor category* [online], 2015 [viitattu 10.1.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/functor+category

[25] *n*Lab, *Godement product* [online], 2010 [viitattu 1.2.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Godement+product

[26] *n*Lab, *Grp* [online], 2013 [viitattu 30.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Grp

[27] *n*Lab, *Grothendieck universe* [online], 2017 [viitattu 6.4.2017], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+universe

[28] *n*Lab, *Hom functor* [online], 2013 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/hom+functor

[29] *n*Lab, *Initial object* [online], 2012 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/initial+object

[30] *n*Lab, *Isomorphism* [online], 2012 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/isomorphism

[31] *n*Lab, *Large category* [online], 2012 [viitattu 5.4.2017], URL http://ncatlab.org/nlab/show/large+category

[32] *n*Lab, *Locally small category* [online], 2015 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/locally+small+category

[33] *n*Lab, *Monomorphism* [online], 2015 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/monomorphism

[34] *n*Lab, *Natural transformation* [online], 2015 [viitattu 10.12.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation

[35] *n*Lab, *Opposite category* [online], 2013 [viitattu 5.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/opposite+category

[36] *n*Lab, *Pairing* [online], 2011 [viitattu 24.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/pairing

[37] *n*Lab, *Product category* [online], 2013 [viitattu 24.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/product+category

[38] *n*Lab, *Preserved limit* [online], 2012 [viitattu 31.3.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/preserved+limit

[39] *n*Lab, *Product* [online], 2014 [viitattu 24.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/product

[40] *n*Lab, *Rel* [online], 2015 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/Rel

[41] *n*Lab, *Small category* [online], 2015 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/small+category

[42] *n*Lab, *Subcategory* [online], 2011 [viitattu 5.11. 2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/subcategory

[43] *n*Lab, *Terminal object* [online], 2015 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/terminal+object

[44] *n*Lab, *Top* [online], 2013 [viitattu 30.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Top

[45] *n*Lab, *Triangle identities* [online], 2017 [viitattu 15.6.2017], URL https://ncatlab.org/nlab/show/triangle+identities

[46] *n*Lab, *Unit of an adjunction* [online], 2016 [viitattu 22.5.2016], URL https://ncatlab.org/nlab/show/unit+of+an+adjunction

[47] *n*Lab, *Vect* [online], 2015 [viitattu 30.12.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Vect

[48] *n*Lab, *Yoneda lemma* [online], 2015 [viitattu 15.2.2015], URL https://ncatlab.org/nlab/show/Yoneda+lemma

[49] *n*Lab, *Zero object* [online], 2013 [viitattu 31.10.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/zero+object

[50] *n*Lab, *Zero morphism* [online], 2014 [viitattu 1.11.2015], URL http://ncatlab.org/nlab/show/zero+morphism

[51] Smith, Keegan, *Adjoint Functors in Algebra, Topology and Mathematical Logic* [verkkodokumentti], 2008 [viitattu 13.8.2017], URL https://people.cs.uct.ac.za/~ksmith/adjoint.pdf

[52] Spivak, David I., *Functorial Data Migration*, Inform. Comput. 217 (2012) 31–51

[53] Stack Exchange, *Intuition behind universal arrow construction of adjoint functors* [verkkokeskustelu], 2015 [viitattu 29.3.2017], URL http://math.stackexchange.com/questions/1551618/intuition-behind-universal-arrow-construction-of-adjoint-functors

[54] Stack Exchange, *What is an intuitive view of adjoints? (version 1: category theory)* [verkkokeskustelu], 2016 [viitattu 2.3.2016], URL http://mathoverflow.net/questions/6551/what-is-an-intuitive-view-of-adjoints-version-1-category-theory

[55] Stack Exchange, *Are adjunctions unique?* [verkkokeskustelu], 2015 [viitattu 21.6.2016], URL http://math.stackexchange.com/questions/1430190/are-adjunctions-unique

[56] Stack Exchange, *Right adjoints preserve limits* [verkkokeskustelu], 2012 [viitattu 15.6.2017], URL https://math.stackexchange.com/questions/101005/right-adjoints-preserve-limits

[57] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Adjoint functors* [online], 2016 [viitattu 2.3.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Adjoint_functors

[58] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Alexandrov topology* [online], 2016 [viitattu 28.12.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Alexandrov_topology

[59] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Category of preordered sets* [online], 2017 [viitattu 1.5.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_preordered_sets

[60] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Category theory* [online], 2015 [viitattu 26.10.2015], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory

[61] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Currying* [online], 2016 [viitattu 1.8.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Currying

[62] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Dual space* [online], 2016 [viitattu 18.1.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_space

[63] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Equivalence of categories* [online], 2016 [viitattu 1.5.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_of_categories

[64] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Free abelian group* [online], 2015 [viitattu 30.10.2015], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Free_abelian_group

[65] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Initial and terminal objects* [online], 2016 [viitattu 18.1.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Initial_and_terminal_objects

[66] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Monoid* [online], 2017 [viitattu 26.6.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Monoid

[67] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Morse–Kelley set theory* [online], 2017 [viitattu 5.4.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Morse%E2%80%93Kelley_set_theory

[68] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *von Neumann–Bernays–Gödel set theory* [online], 2017 [viitattu 5.4.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann%E2%80%93Bernays%E2%80%93G%C3%B6del_set_theory

[69] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Product (category theory)* [online], 2017 [viitattu 1.5.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Product_(category_theory)

[70] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Topos* [online], 2015 [viitattu 26.10.2015], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Topos

[71] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Trivial topology* [online], 2015 [viitattu 13.7.2016], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Trivial_topology

[72] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Universal property* [online], 2017 [viitattu 28.3.2017], URL https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property